MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DE LA COURBURE

DES SURFACES

PAR

M. le V^{te} de SALVERT

DOCTEUR ÈS-SCIENCES,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ LIBRE DES SCIENCES
DE LILLE.

BRUXELLES

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

1881

I –
II. -
III.
IV.

Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 5e année, 1881.

V
A

TABLE DES MATIÈRES

ERRATA.

A la page 101, ligne 15 (au milieu de la page), au lieu de :
« et par conséquent on obtiendrait les conditions cherchées en annulant séparément les coefficients de c et de c^2, ce qui fournirait... »

Lire :

« Or on sait *à priori*, d'une part par la théorie de l'élimination, que l'équation résultante ainsi obtenue serait du quatrième degré par rapport à c, et d'autre part, par la forme de l'expression (5), que cette équation ne contiendrait pas les puissances impaires de c, puisque R doit recevoir la même valeur pour deux directions opposées. Il s'ensuit donc que l'on obtiendrait les conditions cherchées, en annulant séparément les coefficients de c^2 et de c^4, ce qui fournirait,... »

A la page 112, dans l'expression de U, (110), *ligne 2, au lieu de:*

$$\cdots + \Delta_1^2\varphi\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\left(c\,\frac{\varphi}{z}\right)^2\Big\}\Big],$$

corriger :

$$\cdots + \Delta_1^2\varphi\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\Big\{\left(c\,\frac{\varphi}{z}\right)^2\Big].$$

A la page 113, vers le milieu, dans l'expression de Δ, (111), *au lieu de :*

$$\cdots - \Delta_1^{\varsigma}\varphi.\mathcal{H})\Big|,$$

corriger :

$$\cdots - \Delta_1^2\varphi.\mathcal{H}\Big].$$

A la page 124, (au bas), faire précéder les trois équations de condition de la not. (127bis).

A la page 125, (au bas), dans le second membre de la dernière équation, au lieu de :

$$\cdots - \left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2\Big],$$

corriger:

$$\cdots - \left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)\Big].$$

A la page 128, vers le bas, ligne 4 des équations (131), *au lieu de :*

$$(a'b' - \cdots)_0\cdots$$

corriger :

$$(ab' - \cdots)_0\cdots$$

A la page 137, 1re ligne, insérer un astérisque : ...emprunté aux *Vorlesungen* de Jacobi (*)...

Et en note :

(*) Voir les *Vorlesungen über Dynamik* de Jacobi, 26e leçon, p. 199.

MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DE LA COURBURE DES SURFACES

Dans la plupart des ouvrages qui traitent de l'analyse infinitésimale, la théorie de la courbure des surfaces se trouve exposée d'après Monge, en supposant l'équation de la surface préalablement résolue par rapport à l'une des trois variables; en d'autres termes, les formules qui y sont établies sont toutes exprimées à l'aide des dérivées partielles p, q, r, s, t.

Cette façon de procéder présente, à notre avis, deux inconvénients graves : d'abord elle détruit la symétrie entre les trois variables, ce qui est un désavantage sérieux dans une foule de questions, notamment de mécanique, ou de physique mathématique, où la symétrie est le seul fil conducteur qui permette de se retrouver au milieu de la complication des calculs; en second lieu l'application de ces formules exige, ou bien que l'on ait d'abord résolu l'équation de la surface par rapport à l'une des variables pour ensuite en calculer directement les dérivées partielles par rapport aux deux autres, ou bien, si la précédente opération est impossible, que l'on calcule la valeur de ces dérivées à l'aide du théorème des fonctions implicites, et l'on se trouve alors conduit à des substitutions fastidieuses et généralement assez pénibles, précisément à cause du défaut total de symétrie.

Ayant éprouvé moi-même dans plusieurs recherches le besoin de formules relatives à la courbure des surfaces, où la symétrie complète entre les trois variables fût conservée, je pense faire quelque chose d'utile en établissant à nouveau dans ce travail les formules relatives à cette théorie de manière à satisfaire à la condition que je viens de dire, et dont l'importance ne sera pas contestée par quiconque est obligé d'employer fréquemment l'instrument analytique.

Cette étude d'ailleurs, tout en poursuivant son but immédiat que je viens de définir, fournirait elle-même, s'il en était besoin, une nouvelle démonstration de l'avantage considérable qu'il y a à conserver la symétrie partout où elle existe *à priori* par la nature même de la question; car bien que les calculs que nous allons effectuer présentent un beaucoup plus grand nombre de termes que dans la théorie classique, et paraissent souvent à première vue très difficiles à mener à bonne fin, on sera surpris de la facilité avec laquelle la symétrie permettra de les achever, pour conduire en définitive à des formules, sinon aussi simples, du moins plus faciles à retenir et beaucoup plus élégantes que celles qui sont généralement en usage.

Mais pour simplifier autant que possible l'écriture de ces formules, et débarrasser ainsi nos calculs de toute complication matérielle qui ne résulte pas de la difficulté même de la question, nous demanderons la permission d'apporter, dans le courant de ces quelques pages, aux notations différentielles en usage une modification qui simplifiera considérablement les écritures, sans nuire en aucune façon à la clarté et à la précision des signes; et cela en raison du caractère analytique spécial des formules que nous aurons à considérer dans cette étude, lesquelles présentent toutes la forme de polynômes entiers, formés avec les dérivées partielles soit de la fonction $\varphi(x, y, z)$, premier membre de l'équation de la surface, soit d'autres fonctions qui en dépendent d'une façon très simple. Si, de plus, nous énonçons ce fait que les variables indépendantes x, y, z ne figureront jamais *explicitement* dans ces formules, on voit que nous n'introduirons aucune ambiguïté, en convenant de supprimer haut et bas dans les notations des dérivées partielles la caractéristique d, en laissant subsister toutefois les exposants dont elle est affectée, en sorte que pour nous,

$$\frac{\varphi}{x},\ \frac{\varphi}{y},\ \frac{\varphi}{z},\ \frac{\varphi^2}{x^2},\ \frac{\varphi^2}{y^2},\ \frac{\varphi^2}{z^2},\ \frac{\varphi^2}{yz},\ \frac{\varphi^2}{zx},\ \frac{\varphi^2}{xy},\ \frac{\varphi^3}{x^3},\ldots$$

représenteront respectivement

$$\frac{d\varphi}{dx},\ \frac{d\varphi}{dy},\ \frac{d\varphi}{dz},\ \frac{d^2\varphi}{dx^2},\ \frac{d^2\varphi}{dy^2},\ \frac{d^2\varphi}{dz^2},\ \frac{d^2\varphi}{dydz},\ \frac{d^2\varphi}{dzdx},\ \frac{d^2\varphi}{dxdy},\ \frac{d^3\varphi}{dx^3},\ldots$$

tandis que nous aurons soin de dénoter par

$$\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2,\ \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2,\ \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2,\ \frac{\varphi}{y}\,\frac{\varphi}{z},\ \frac{\varphi}{z}\,\frac{\varphi}{x},\ \frac{\varphi}{x}\,\frac{\varphi}{y},\ldots$$

les carrés ou produits

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2,\ \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2,\ \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2,\ \frac{d\varphi}{dy}\,\frac{d\varphi}{dz},\ \frac{d\varphi}{dz}\,\frac{d\varphi}{dx},\ \frac{d\varphi}{dx}\,\frac{d\varphi}{dy},\ldots$$

De plus, nous emploierons fréquemment la notation des *paramètres différentiels des 1er et 2d ordre,* introduite en analyse par Lamé (*), et nous conviendrons de poser avec lui, quel que soit φ,

$$\Delta_1\varphi = \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}$$

(le radical étant toujours supposé pris positivement) et

$$\Delta_2\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2},$$

c'est-à-dire, avec nos notations,

$$\Delta_1\varphi = \sqrt{\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2},\quad \Delta_2\varphi = \frac{\varphi^2}{x^2} + \frac{\varphi^2}{y^2} + \frac{\varphi^2}{z^2},$$

symboles qui, en raison de leur retour fréquent dans nos calculs, nous seront de la plus grande utilité.

(*) Voir *Leçons sur les coordonnées curvilignes,* § III, pages 5 et 6.

Ces conventions admises une fois pour toutes, nous aborderons cette étude en établissant à nouveau l'expression du rayon de courbure d'une section normale d'où nous déduirons toute la suite de notre théorie.

I. — Rayon de courbure d'une section normale.

On établit souvent la formule relative à cet objet, de manière à donner simplement la grandeur du rayon de courbure, sans se préoccuper de la direction de ce rayon, c'est-à-dire sans spécifier suivant lequel des deux sens de la normale il doit être porté, à partir du point considéré (*).

Nous déterminerons à la fois la grandeur et la direction du rayon, en procédant de la façon suivante.

Considérons d'abord une courbe quelconque, tracée sur la surface. — L'une de ses équations sera l'équation même de la surface

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

laquelle, étant différentiée deux fois en laissant arbitraire la variable indépendante, donnera successivement suivant nos notations :

$$\frac{\varphi}{x}dx + \frac{\varphi}{y}dy + \frac{\varphi}{z}dz = 0,$$

et

$$(0) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\varphi}{x}d^2x + \left(\frac{\varphi^2}{x^2}dx + \frac{\varphi^2}{xy}dy + \frac{\varphi^2}{xz}dz\right)dx \\ &+ \frac{\varphi}{y}d^2y + \left(\frac{\varphi^2}{yx}dx + \frac{\varphi^2}{y^2}dy + \frac{\varphi^2}{yz}dz\right)dy \\ &+ \frac{\varphi}{z}d^2z + \left(\frac{\varphi^2}{zx}dx + \frac{\varphi^2}{zy}dy + \frac{\varphi^2}{z^2}dz\right)dz = 0. \end{aligned} \right.$$

(*) Cette lacune regrettable semble exister notamment dans l'ouvrage classique de Duhamel, intitulé *Éléments de calcul infinitésimal*, si excellent d'ailleurs à beaucoup d'égards ; car il n'indique pas clairement comment l'on reconnaîtra suivant lequel des deux sens de la normale le rayon de courbure devra être porté. — (Voir t. II, nos 246-247, pp. 333 à 337.)

Si maintenant nous adoptons pour variable indépendante l'arc de la courbe compté à partir d'un point quelconque, il nous suffira de diviser tous les termes de l'équation précédente par ds^2, pour obtenir une équation en termes finis correspondante, qui sera en ordonnant :

$$\frac{\varphi}{x}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\varphi}{y}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\varphi}{z}\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{\varphi^2}{x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\frac{\varphi^2}{y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\frac{\varphi^2}{z^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2$$
$$+2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds}+2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds}+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}=0.$$

Or, si l'on se reporte à la théorie connue des courbes dans l'espace, on voit que dans cette équation les dérivées premières $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ ne sont autre chose que les cosinus a, b, c des angles formés par les axes coordonnés avec la tangente au point (x, y, z), et les dérivées secondes $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}$ sont de même ce que l'on pourrait appeler les projections de la courbure sur les trois axes coordonnés, c'est-à-dire que l'on a, *en grandeur et en signe*,

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{1}{R}\cos\lambda,\quad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{1}{R}\cos\mu,\quad \frac{d^2z}{ds^2}=\frac{1}{R}\cos\nu \text{ (*)},$$

(*) Le moyen le plus rapide de retrouver ces formules, au cas où on les aurait oubliées, consiste à partir des principes fondamentaux et bien connus de la cinématique, en supposant les coordonnées d'un point quelconque de la courbe exprimées en fonction de la variable auxiliaire s, ce qui revient à écrire les équations de la courbe sous la forme

$$x=\varphi(s),\quad y=\psi(s),\quad z=\varpi(s),$$

et supposant ensuite cette courbe parcourue par un mobile animé du mouvement uniforme $s=t$.

On voit de suite que les composantes de l'accélération suivant les axes seront exprimées en grandeur et en signe par

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi''(s)=\frac{d^2x}{ds^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\psi''(s)=\frac{d^2y}{ds^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=\varpi''(s)=\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Or, le mouvement étant uniforme, l'accélération se réduit à sa composante normale $\frac{v^2}{R}$, ou simplement $\frac{1}{R}$ dans le cas actuel, puisque l'on suppose $v=\frac{ds}{dt}=1$. De plus, l'accélération centripète étant toujours dirigée, comme son nom l'indique, vers le centre de couren désignant par R la grandeur du rayon de courbure, et par λ, μ, ν, les angles que forme sa direction avec les axes coordonnés.

En substituant donc ces valeurs, l'équation précédente pourra s'écrire

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\varphi}{x}\cos\lambda + \frac{\varphi}{y}\cos\mu + \frac{\varphi}{z}\cos\nu\right)$$
$$+ a^2\frac{\varphi^2}{x^2} + b^2\frac{\varphi^2}{y^2} + c^2\frac{\varphi^2}{z^2} + 2bc\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z} + 2ca\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x} + 2ab\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y} = 0,$$

ou sous une forme plus abrégée

$$(1) \quad . \quad . \quad -\frac{1}{R}\left(\frac{\varphi}{x}\cos\lambda + \frac{\varphi}{y}\cos\mu + \frac{\varphi}{z}\cos\nu\right) = F(a, b, c),$$

en convenant de poser dorénavant

$$(2) \quad F(a, b, c) = a^2\frac{\varphi^2}{x^2} + b^2\frac{\varphi^2}{y^2} + c^2\frac{\varphi^2}{z^2} + 2bc\frac{\varphi^2}{yz} + 2ca\frac{\varphi^2}{zx} + 2ab\frac{\varphi^2}{xy}.$$

Prenons maintenant, pour cette courbe demeurée jusqu'ici totalement arbitraire, précisément la section normale que nous avons en vue. — La tangente spécifiée par les trois cosinus a, b, c ne sera autre chose que la trace de cette section normale sur le plan tangent au point considéré. De plus, les trois cosinus $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ seront déterminés au signe près, car il n'y aura à hésiter qu'entre les deux directions de la normale au même point, c'est-à-dire entre les deux systèmes de valeurs :

$$(3) \quad . \quad . \quad \cos\lambda = \frac{+\frac{\varphi}{x}}{\Delta_1\varphi}, \quad \cos\mu = \frac{+\frac{\varphi}{y}}{\Delta_1\varphi}, \quad \cos\nu = \frac{+\frac{\varphi}{z}}{\Delta_1\varphi},$$

---

bure, c'est-à-dire précisément suivant la direction du rayon de courbure de la trajectoire, les mêmes composantes de l'accélération se trouvent exprimées, *en grandeur et en signe*, par

$$\frac{1}{R}\cos\lambda, \quad \frac{1}{R}\cos\mu, \quad \frac{1}{R}\cos\nu.$$

En égalant respectivement ces expressions aux trois précédentes, on obtient précisément la formule que nous voulions rappeler.

et

$$(4) \quad . \quad . \quad \cos\lambda = \frac{-\varphi_x}{\Delta_1\varphi}, \quad \cos\mu = \frac{-\varphi_y}{\Delta_1\varphi}, \quad \cos\nu = \frac{-\varphi_z}{\Delta_1\varphi}.$$

Ces deux systèmes de valeurs correspondant chacun à un sens parfaitement déterminé de la normale en chaque point, nous nous en servirons pour caractériser le sens de la normale auquel ils se rapportent, et nous conviendrons de désigner par l'expression abrégée de ***sens positif de la normale*** celui auquel conviennent les valeurs (3), et par celle de ***sens négatif***, le sens auquel se rapportent les valeurs (4).

Cela posé, la substitution de ces valeurs dans l'équation précédente (1) donnera, suivant que l'on adoptera l'un ou l'autre système,

$$\mp \frac{\Delta_1\varphi}{R} = F(a, b, c),$$

et $\Delta_1\varphi$ étant ainsi que R jusqu'ici supposé essentiellement positif, on voit qu'il faudra dans chaque cas, pour réaliser la concordance des signes, s'arranger pour obtenir dans le premier membre précisément le signe du polynôme $F(a, b, c)$, qui forme le second membre.

Or, pour obtenir ce résultat, on voit qu'à cause du signe — qui précède le premier membre de l'équation (1), il sera nécessaire d'adopter pour $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, les valeurs (4) si $F(a, b, c)$ est positif, et, au contraire les valeurs (3), si $F(a, b, c)$ est négatif. — La direction du rayon de courbure sera donc forcément le sens négatif de la normale dans le premier cas, et le sens positif de la normale dans le second. — Le signe de l'expression (2) suffira ainsi dans tous les cas pour déterminer la direction du rayon de courbure.

Afin de n'avoir pas à tenir compte du double signe qui figure dans l'équation précédente, et en vue de simplifier l'énoncé des résultats auxquels nous parviendrons dans la suite, nous conviendrons dorénavant, comme on le fait généralement, de donner un signe aux rayons de courbure, c'est-à-dire de considérer désormais R comme représentant, non plus la grandeur absolue du rayon, mais la grandeur de ce rayon prise avec le signe + ou le signe —, selon le sens de la normale suivant lequel il est dirigé.

Si nous convenons, par exemple, de considérer R comme *positif*, lorsque le rayon est dirigé dans le sens *négatif* de la normale, et inversement, il résulte immédiatement de la discussion qui précède, que nous aurons dans tous les cas, *en grandeur et en signe*,

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\Delta_1\varphi}{R} = F(a, b, c),$$

car les deux membres de cette équation se trouveront, dans les mêmes circonstances, ou tous deux positifs, ou tous deux négatifs.

La grandeur et la direction du rayon de courbure se trouveront ainsi déterminés à la fois, à l'aide des conventions qui précèdent, par la seule formule (5), laquelle étant résolue par rapport à R, donne :

$$R = \frac{\Delta_1\varphi}{F(a, b, c)},$$

ou ce qui est la même chose, d'après l'équation (2),

$$(6) \quad R = \frac{\sqrt{\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2}}{a^2\frac{\varphi^2}{x^2} + b^2\frac{\varphi^2}{y^2} + c^2\frac{\varphi^2}{z^2} + 2bc\frac{\varphi^2}{yz} + 2ca\frac{\varphi^2}{zx} + 2ab\frac{\varphi^2}{xy}}.$$

Nous allons chercher maintenant à étudier à l'aide de cette formule la loi de variation de la grandeur et de la direction du rayon de courbure, lorsque le plan de la section tourne autour de la normale.

II. — Rayons de courbure principaux et sections principales.

La formule que nous venons d'établir pour le rayon de courbure d'une section normale faisant connaître comment la grandeur de ce rayon varie avec l'orientation de cette section, la recherche des plus grandes ou des plus petites valeurs de ce rayon, ainsi que des directions auxquelles elles correspondent, constitue évidemment un des problèmes les plus importants de la théorie de la courbure des surfaces.

On étudie le plus souvent la loi de cette variation et les questions qui s'y rattachent, à l'aide de considérations géométriques fort ingénieuses, introduites dans la science par Charles Dupin et que nous déduirons aussi de notre formule fondamentale (6) dans le paragraphe suivant.

Mais tout d'abord, nous préférons rester sur le terrain purement analytique, et nous croyons suivre une voie plus logique et plus naturelle, en déduisant toute cette recherche de la notion même du maximum et du minimum, et appliquant immédiatement à la formule qui donne l'expression du rayon de courbure les méthodes générales exposées pour cet objet en analyse. Nous retrouverons ainsi par un chemin plus direct, quoique assurément moins rapide, tous les résultats essentiels de la théorie, et nous n'aurons, pour ainsi dire, qu'à les rappeler, lorsque dans le paragraphe suivant nous viendrons à parler de l'*Indicatrice.*

Adoptant donc comme point de départ cette formule (6), ou mieux encore la formule (5), et remarquant que la quantité $\Delta_1\varphi$ est constante en chaque point, la recherche des rayons de courbure maximum ou minimum se réduira pour nous à la recherche du maximum ou du minimum de la fonction $F(a, b, c)$, définie par l'équation (2), les trois variables a, b, c étant assujetties à vérifier les deux équations

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} a \dfrac{\varphi}{x} + b \dfrac{\varphi}{y} + c \dfrac{\varphi}{z} = 0. \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1. \end{array} \right.$$

Pour cela la méthode générale conduit à différentier ces deux équations ainsi que l'équation (5), ce qui nous donnera les trois suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{F}{a}\,da + \frac{F}{b}\,db + \frac{F}{c}\,dc = 0, \\ &\frac{\varphi}{x}\,da + \frac{\varphi}{y}\,dc + \frac{\varphi}{z}\,dc = 0, \\ &\quad ada + bdb + cdc = 0, \end{aligned}\right.$$

et à éliminer ensuite entre ces trois dernières équations les trois différentielles *da*, *db*, *dc*. Or, cette élimination se fera immédiatement en égalant leur déterminant à zéro, c'est-à-dire en écrivant l'équation

$$a\left(\frac{\varphi}{y}\frac{F}{c} - \frac{\varphi}{z}\frac{F}{b}\right) + b\left(\frac{\varphi}{z}\frac{F}{a} - \frac{\varphi}{x}\frac{F}{c}\right) + c\left(\frac{\varphi}{x}\frac{F}{b} - \frac{\varphi}{y}\frac{F}{a}\right) = 0,$$

laquelle, étant jointe aux deux équations (7), déterminera les systèmes des valeurs de a, b, c, auxquelles correspondent les maximum ou minimum de R, et, ces valeurs étant connues, l'équation (5) ou (6) fournira ensuite la valeur de ces maximum ou minimum.

Le but cherché serait donc atteint, si l'on pouvait résoudre le système formé par les deux équations (7) et l'équation que nous venons d'écrire. Or, parmi ces trois équations, deux étant du second degré, la chose paraît impossible au premier abord, car, en pareil cas, l'élimination de deux des inconnues conduit en général pour la troisième à une équation de degré supérieur que l'on ne peut résoudre. Mais en y regardant de plus près, on voit qu'ici cette résolution est possible, parce que sur ces trois équations deux sont homogènes, dont l'une linéaire, ce qui détermine le rapport des inconnues à l'aide d'une équation du second degré seulement; et ce rapport une fois connu, la troisième, c'est-à-dire la seconde équation (7), détermine leurs valeurs sans aucune difficulté.

Toutefois nous ne suivrons pas cette méthode qui nous conduirait à des formules dénuées de symétrie et compliquées de radicaux, et au lieu de chercher ainsi à déterminer d'abord a, b, c pour en conclure la valeur de R, nous adopterons uné marche inverse consistant à déterminer d'abord directement les valeurs des rayons de courbure maximum ou minimum et à en déduire ensuite la direction des sections correspondantes.

Nous y arriverons facilement à l'aide de l'artifice suivant.

Considérant pour un instant dans l'équation immédiatement précédente les dérivées $\frac{F}{a}$, $\frac{F}{b}$, $\frac{F}{c}$, comme des coefficients, nous assimilerons cette équation à une équation linéaire homogène en a, b, c, et la joignant à la première des équations (7), nous les mettrons toutes deux sous la forme de rapports égaux, par le procédé connu, ainsi qu'il suit :

$$\frac{a}{\frac{\varphi}{y}\left(\frac{\varphi}{x}\frac{F}{b}-\frac{\varphi}{y}\frac{F}{a}\right)-\frac{\varphi}{z}\left(\frac{\varphi}{z}\frac{F}{a}-\frac{\varphi}{x}\frac{F}{c}\right)}=\frac{b}{\frac{\varphi}{z}\left(\frac{\varphi}{y}\frac{F}{c}-\frac{\varphi}{z}\frac{F}{b}\right)-\frac{\varphi}{x}\left(\frac{\varphi}{x}\frac{F}{b}-\frac{\varphi}{y}\frac{F}{a}\right)}$$

$$=\frac{c}{\frac{\varphi}{x}\left(\frac{\varphi}{z}\frac{F}{a}-\frac{\varphi}{x}\frac{F}{c}\right)-\frac{\varphi}{y}\left(\frac{\varphi}{y}\frac{F}{c}-\frac{\varphi}{z}\frac{F}{b}\right)}.$$

Nous écrirons ensuite ces rapports d'une façon plus simple, en ajoutant et retranchant au dénominateur de chacun, respectivement les termes $\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{F}{a}$, $\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{F}{b}$, $\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{F}{c}$, et posant, pour abréger l'écriture,

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Pi(a,b,c)=\frac{\varphi}{x}\frac{F}{a}+\frac{\varphi}{y}\frac{F}{b}+\frac{\varphi}{z}\frac{F}{c}.$$

Puis nous multiplierons chaque rapport haut et bas respectivement par a, b, c, et ayant alors égard aux équations (7) et (5), ainsi qu'à l'identité

$$(8^{bis}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a\frac{F}{a}+b\frac{F}{b}+c\frac{F}{c}=2F(a,b,c),$$

qui résulte de l'homogénéité de la fonction $F(a, b, c)$ définie par l'équation (2), nous obtiendrons ainsi la suite de rapports égaux

$$\frac{a}{\frac{\varphi}{x}\,\Pi(a,b,c)-\frac{F}{a}\,\Delta_1^2\varphi}=\frac{b}{\frac{\varphi}{y}\,\Pi(a,b,c)-\frac{F}{b}\,\Delta_1^2\varphi}=\frac{c}{\frac{\varphi}{z}\,\Pi(a,b,c)-\frac{F}{c}\,\Delta_1^2\varphi}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{\left(a\frac{\varphi}{x}+b\frac{\varphi}{y}+c\frac{\varphi}{z}\right)\Pi(a,b,c)-\left(a\frac{F}{a}+b\frac{F}{b}+c\frac{F}{c}\right)\Delta_1^2\varphi}=\frac{1}{-2\frac{\Delta_1^3\varphi}{R}},$$

d'où, en comparant simplement les trois premiers rapports au dernier et chassant les dénominateurs, nous obtiendrons définitivement les trois équations linéaires et homogènes :

$$(9) \quad \ldots \quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\varphi}{x}\,\Pi(a,b,c)-\frac{F}{a}\,\Delta_1^2\varphi=-2a\,\frac{\Delta_1^3\varphi}{R},\\
&\frac{\varphi}{y}\,\Pi(a,b,c)-\frac{F}{b}\,\Delta_1^2\varphi=-2b\,\frac{\Delta_1^3\varphi}{R},\\
&\frac{\varphi}{z}\,\Pi(a,b,c)-\frac{F}{c}\,\Delta_1^2\varphi=-2c\,\frac{\Delta_1^3\varphi}{R},
\end{aligned}\right.$$

lesquelles se réduisent en réalité à une seule distincte des équations (7), comme il est nécessaire pour qu'elles soient compatibles; car, si on les ajoute successivement multipliées, d'abord par a, b, c, puis par $\frac{\varphi}{x}$, $\frac{\varphi}{y}$, $\frac{\varphi}{z}$, on obtient deux identités en vertu des équations (5), (7), (8), et de la formule (8^{bis}) qui exprime l'homogénéité de la fonction $F(a, b, c)$.

Les équations qui précèdent, jointes à la première des équations (7), détermineront donc très simplement les rapports des trois inconnues a, b, c, et conjointement avec la seconde équation (7) leurs valeurs, lorsque l'on connaîtra la valeur correspondante de R. Tout revient donc à former une équation qui admette pour racines les rayons de courbure maximum ou minimum.

Pour cela il n'y a évidemment qu'à éliminer les trois cosinus a, b, c entre les trois équations (9) qui se réduisent à deux, comme nous l'avons fait remarqer, et les deux équations (7). Or, les trois équations (9) étant linéaires et homogènes, l'élimination de a, b, c se fera immédiatement entre elles trois seulement, en égalant leur déterminant à zéro; car on ne fait ainsi qu'écrire la condition nécessaire pour qu'elles soient compatibles, condition qui est bien vérifiée, ainsi que nous l'avons fait observer tout à l'heure.

Pour former ce déterminant il faut commencer par ordonner ces équations par rapport aux inconnues a, b, c, de manière à mettre en évidence leurs coefficients, ce qui se fera en ordonnant de la même façon la fonction $\Pi(a, b, c)$ définie par l'équation (8), laquelle, étant développée, donnera successivement, en vertu de (2),

$$\begin{aligned}
\Pi(a, b, c) &= 2\frac{\varphi}{x}\left(a\frac{\varphi^2}{x^2} + b\frac{\varphi^2}{xy} + c\frac{\varphi^2}{zx}\right) \\
&\quad + 2\frac{\varphi}{y}\left(a\frac{\varphi^2}{xy} + b\frac{\varphi^2}{y^2} + c\frac{\varphi^2}{yz}\right) \\
&\quad + 2\frac{\varphi}{z}\left(a\frac{\varphi^2}{zx} + b\frac{\varphi^2}{yz} + c\frac{\varphi^2}{z^2}\right) \\
&= 2a\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{x^2} + \frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy} + \frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{zx}\right) + 2b\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{xy} + \frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{y^2} + \frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}\right) \\
&\quad + 2c\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx} + \frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{yz} + \frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{z^2}\right) \\
&= a\frac{\Delta_1^2\varphi}{x} + b\frac{\Delta_1^2\varphi}{y} + c\frac{\Delta_1^2\varphi}{z} \\
&= 2\Delta_1\varphi\left(a\frac{\Delta_1\varphi}{x} + b\frac{\Delta_1\varphi}{y} + c\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right),
\end{aligned}$$

et il n'y aura plus qu'à substituer cette expression dans les trois équations (9), et à rapprocher les termes semblables.

La première de ces équations ainsi traitée devient :

$$\frac{\varphi}{x}\cdot 2\Delta_1\varphi\left(a\frac{\Delta_1\varphi}{x} + b\frac{\Delta_1\varphi}{y} + c\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right) - 2\left(a\frac{\varphi^2}{x^2} + b\frac{\varphi^2}{xy} + c\frac{\varphi^2}{zx}\right)\Delta_1^2\varphi = -2a\frac{\Delta_1^3\varphi}{R},$$

ou en divisant tout par $2\Delta_1^3\varphi$ et ordonnant,

$$a\,\frac{\frac{\varphi}{x}\frac{\Delta_1\varphi}{x}-\Delta_1\varphi\frac{\varphi^2}{x^2}}{\Delta_1^2\varphi}+b\,\frac{\frac{\varphi}{y}\frac{\Delta_1\varphi}{y}-\Delta_1\varphi\frac{\varphi^2}{xy}}{\Delta_1^2\varphi}+c\,\frac{\frac{\varphi}{z}\frac{\Delta_1\varphi}{z}-\Delta_1\varphi\frac{\varphi^2}{xz}}{\Delta_1^2\varphi}=-\frac{a}{R}.$$

On aperçoit dès lors une simplification remarquable dont la forme de ces équations est susceptible, car les trois coefficients du premier membre ne sont autre chose que les trois dérivées du cosinus de l'angle de l'une des normales avec l'axe des x. La symétrie permet donc d'écrire immédiatement le résultat de la substitution dans les deux autres équations.

Il suit de là que si l'on désigne par λ, μ, ν les trois cosinus directeurs de la normale (prise dans son sens positif), c'est-à-dire les trois quantités :

$$(10)\;.\;.\;.\;.\quad \lambda=\frac{\frac{\varphi}{x}}{\Delta_1\varphi},\quad \mu=\frac{\frac{\varphi}{y}}{\Delta_1\varphi},\quad \nu=\frac{\frac{\varphi}{z}}{\Delta_1\varphi},$$

liées entre elle par la relation,

$$(11)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad \lambda^2+\mu^2+\nu^2=1,$$

ces trois équations (9) prendront la forme extrêmement remarquable :

$$(12)\;.\;.\;.\;.\quad \left\{\begin{aligned} &a\frac{\lambda}{x}+b\frac{\lambda}{y}+c\frac{\lambda}{z}=\frac{a}{R},\\ &a\frac{\mu}{x}+b\frac{\mu}{y}+c\frac{\mu}{z}=\frac{b}{R},\\ &a\frac{\nu}{x}+b\frac{\nu}{y}+c\frac{\nu}{z}=\frac{c}{R}.\end{aligned}\right.$$

Cela fait, nous obtiendrons très simplement le déterminant de ce système, en le comparant au déterminant du système très voisin, obtenu en effaçant les trois seconds membres, c'est-à-dire le suivant :

$$(13) \quad \dots\dots \quad \left\{ \begin{aligned} & a\frac{\lambda}{x} + b\frac{\lambda}{y} + c\frac{\lambda}{z} = 0, \\ & a\frac{\mu}{x} + b\frac{\mu}{y} + c\frac{\mu}{z} = 0, \\ & a\frac{\nu}{x} + b\frac{\nu}{y} + c\frac{\nu}{z} = 0, \end{aligned} \right.$$

car, si l'on désigne par Δ le déterminant de ce dernier système d'après les règles connues du calcul des déterminants, on trouvera facilement, pour celui que nous cherchons, l'expression

$$\Delta - \frac{1}{R}\left[\frac{\mu}{y}\frac{\nu}{z} - \frac{\mu}{z}\frac{\nu}{y} + \frac{\nu}{z}\frac{\lambda}{x} - \frac{\nu}{x}\frac{\lambda}{z} + \frac{\lambda}{x}\frac{\mu}{y} - \frac{\lambda}{y}\frac{\mu}{x}\right]$$
$$+ \frac{1}{R^2}\left(\frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{y} + \frac{\nu}{z}\right) - \frac{1}{R^3},$$

laquelle, étant égalée à zéro, nous fournira précisément l'équation que nous nous proposons d'obtenir.

Or, dans cette expression le déterminant Δ est évidemment nul, car le système des trois équations (13), auquel il appartient, se réduit bien à deux équations seulement, ainsi qu'on le voit en les ajoutant respectivement multipliées par λ, μ, ν, ce qui donne :

$$a\frac{d}{dx}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + b\frac{d}{dy}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + c\frac{d}{dz}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 0\,;$$

résultat manifestement identique en vertu de (11).

L'équation cherchée se réduit donc en définitive à

$$-\frac{1}{R}\left[\frac{\mu}{y}\frac{\nu}{z} - \frac{\mu}{z}\frac{\nu}{y} + \frac{\nu}{z}\frac{\lambda}{x} - \frac{\nu}{x}\frac{\lambda}{z} + \frac{\lambda}{x}\frac{\mu}{y} - \frac{\lambda}{y}\frac{\mu}{x}\right]$$
$$+ \frac{1}{R^2}\left(\frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{y} + \frac{\nu}{z}\right) - \frac{1}{R^3} = 0;$$

équation que nous écrirons ainsi :

$$(14) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{R}\left(\frac{1}{R^2}-H\frac{1}{R}+K\right)=0,$$

en posant pour abréger :

$$(15) \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} H &= \frac{\lambda}{x}+\frac{\mu}{y}+\frac{\nu}{z}, \\ K &= \frac{\mu}{y}\frac{\nu}{z}-\frac{\mu}{z}\frac{\nu}{y}+\frac{\nu}{z}\frac{\lambda}{x}-\frac{\nu}{x}\frac{\lambda}{z}+\frac{\lambda}{x}\frac{\mu}{y}-\frac{\lambda}{y}\frac{\mu}{x}, \end{aligned} \right.$$

les coefficients H et K étant, comme nous le verrons (au facteur $\Delta_1\varphi$ près), des fonctions rationnelles des dérivées de φ, dont nous donnerons l'expression plus tard. Nous aurons donc ainsi trois solutions, savoir : $\frac{1}{R}=0$, ou $R=\infty$, et les deux valeurs $R=R'$ et $R=R''$, correspondant aux deux racines de l'équation du second degré

$$(16) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{R^2}-H\frac{1}{R}+K=0.$$

Nous verrons, plus loin, s'il faut admettre ces trois solutions dans tous les cas, ou dans quel cas il est nécessaire de faire un choix. Disons seulement pour l'instant que les deux rayons R′ et R″ sont ceux que l'on désigne par le nom de *rayons de courbure principaux*. Une fois ces valeurs obtenues, les équations (9) ou (12) et (7) fourniront aisément les valeurs de *a*, *b*, *c* correspondantes, lesquelles sont appelées par analogie *sections principales*. Dans le cas où il y aurait des rayons de courbure infinis, les directions particulières correspondant à ces rayons seraient, au contraire, fournies par les équations (13) et (7).

Les équations que nous venons d'établir ne donnent pas seulement la grandeur et la direction des rayons de courbure principaux; elles fournissent en même temps assez facilement la relation de position qui existe entre ces rayons, et permettent d'exprimer par une formule très simple la loi de variation du rayon de courbure lorsque l'on fait varier la direction de cette section.

En effet, désignons par a', b', c', et a'', b'', c'', les valeurs a, b, c qui correspondent respectivement aux rayons principaux R' et R''. Nous aurons séparément en vertu des équations (9) les deux systèmes :

$$
(17)\ \ldots\ \left\{\begin{aligned}
&\frac{\varphi}{x}\,\Pi\,(a', b', c') - \frac{dF}{da'}\,\Delta_1^2\varphi = -\,2a'\,\frac{\Delta_1^3\varphi}{R'}\ (^*),\\
&\frac{\varphi}{y}\,\Pi\,(a', b', c') - \frac{dF}{db'}\,\Delta_1^2\varphi = -\,2b'\,\frac{\Delta_1^3\varphi}{R'},\\
&\frac{\varphi}{z}\,\Pi\,(a', b', c') - \frac{dF}{dc'}\,\Delta_1^2\varphi = -\,2c'\,\frac{\Delta_1^3\varphi}{R'}.
\end{aligned}\right.
$$

$$
(18)\ \ldots\ \left\{\begin{aligned}
&\frac{\varphi}{x}\,\Pi\,(a'', b'', c'') - \frac{dF}{da''}\,\Delta_1^2\varphi = -\,2a''\,\frac{\Delta_1^3\varphi}{R''},\\
&\frac{\varphi}{y}\,\Pi\,(a'', b'', c'') - \frac{dF}{db''}\,\Delta_1^2\varphi = -\,2b''\,\frac{\Delta_1^3\varphi}{R''},\\
&\frac{\varphi}{z}\,\Pi\,(a'', b'', c'') - \frac{dF}{dc''}\,\Delta_1^2\varphi = -\,2c''\,\frac{\Delta_1^3\varphi}{R''}.
\end{aligned}\right.
$$

En multipliant les trois équations du premier système respectivement par a'', b'', c'', et ajoutant, puis ayant égard à la première des équations (7), on obtient :

$$
(19)\quad -\left(a''\frac{dF}{da'} + b''\frac{dF}{db'} + c''\frac{dF}{dc'}\right) = -\,2\,\frac{\Delta_1^3\varphi}{R'}\,(a'a'' + b'b'' + c'c'').
$$

En traitant de même le second système, on obtient par la même raison :

$$
(20)\quad -\left(a'\frac{dF}{da''} + b'\frac{dF}{db''} + c'\frac{dF}{dc''}\right) = -\,2\,\frac{\Delta_1^3\varphi}{R''}\,(a'a'' + b'b'' + c'c'').
$$

(*) Nous écrivons dans ces équations contrairement à notre habitude $\frac{dF}{da'}$, $\frac{dF}{db'}$, $\frac{dF}{dc'}$, et non simplement $\frac{F}{a'}$, $\frac{F}{b'}$, $\frac{F}{c'}$, pour marquer qu'il faut d'abord, dans la fonction F (a, b, c), remplacer a, b, c, respectivement par a', b', c', et ensuite, différentier le résultat par rapport à chacune de ces quantités. De même pour $\frac{dF}{da''}$, $\frac{dF}{db''}$, $\frac{dF}{dc''}$.

Si l'on fait attention maintenant que les premiers membres de ces deux dernières équations sont identiques, comme étant symétriques en a', b', c' et a'', b'', c'', car l'on a :

$$a' \frac{dF}{da''} + b' \frac{dF}{db''} + c' \frac{dF}{dc''} = a'a'' \frac{\varphi^2}{x^2} + b'b'' \frac{\varphi^2}{y^2} + c'c'' \frac{\varphi^2}{z^2}$$
$$+ (b'c'' + c'b'') \frac{\varphi^2}{yz} + (c'a'' + a'c'') \frac{\varphi^2}{zx} + (a'b'' + b'a'') \frac{\varphi^2}{xy}$$
$$= a'' \frac{dF}{da'} + b'' \frac{dF}{db'} + c'' \frac{dF}{dc'},$$

on verra immédiatement qu'en retranchant l'une de l'autre, les deux équations précédentes, il reste seulement

$$2\Delta_1^3\varphi \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}\right)(a'a'' + b'b'' + c'c'') = 0,$$

ou, ce qui revient au même (en exceptant le cas très particulier de $R' = R''$, que nous examinerons plus tard),

$$(21) \quad \ldots\ldots \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0,$$

c'est-à-dire que les directions des sections principales sont perpendiculaires entre elles.

Remarquons de plus, en passant, que ce résultat reporté dans les équations (19) et (20) entraîne la condition :

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} & a' \frac{dF}{da''} + b' \frac{dF}{db''} + c' \frac{dF}{dc''} = a'' \frac{dF}{da'} + b'' \frac{dF}{db'} + c'' \frac{dF}{dc'} \\ & = a'a'' \frac{\varphi^2}{x^2} + b'b'' \frac{\varphi^2}{y^2} + c'c'' \frac{\varphi^2}{z^2} + (b'c'' + c'b'') \frac{\varphi^2}{yz} \\ & + (c'a'' + a'c'') \frac{\varphi^2}{zx} + (a'b'' + b'a'') \frac{\varphi^2}{xy} = 0, \end{aligned} \right.$$

remarque qui nous sera utile tout à l'heure.

Les résultats qui précèdent permettent maintenant de donner à l'expression (6) une forme remarquable, qui met en évidence d'une façon très simple la loi de variation du rayon de courbure d'une section normale, lorsque l'on fait varier la direction de cette section.

Pour cela nous déterminerons la direction de cette section à l'aide des angles θ' et θ'' qu'elle forme avec les deux directions des rayons principaux R′ et R″, supposées connues en vertu des formules qui précèdent.

Si l'on considère la normale à la surface, et les deux rayons principaux, comme formant un nouveau système d'axes coordonnés, ce système formera avec l'ancien axe des x, des angles dont les cosinus sont respectivement λ, a', a'', et avec la trace de la section normale sur le plan tangent des angles dont les cosinus sont 0, $\cos\theta'$, $\cos\theta''$. En appliquant la formule connue, on obtiendra donc pour a, c'est-à-dire pour le cosinus de ces deux dernières directions, la première des trois valeurs suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} a &= a'\cos\theta' + a''\cos\theta'', \\ b &= b'\cos\theta' + b''\cos\theta'', \\ c &= c'\cos\theta' + c''\cos\theta''; \end{aligned}\right.$$

les deux autres s'obtiendront par un raisonnement analogue.

Si nous reportons ces valeurs dans la formule (5), elle devient en tenant compte de (2) :

$$\frac{\Delta_1\varphi}{R} =$$

$$(a'\cos\theta' + a''\cos\theta'')^2\frac{\varphi^2}{x^2} + (b'\cos\theta' + b''\cos\theta'')^2\frac{\varphi^2}{y^2} + (c'\cos\theta' + c''\cos\theta'')^2\frac{\varphi^2}{z^2}$$

$$+ 2(b'\cos\theta' + b''\cos\theta'')(c'\cos\theta' + c''\cos\theta'')\frac{\varphi^2}{yz}$$

$$+ 2(c'\cos\theta' + c''\cos\theta'')(a'\cos\theta' + a''\cos\theta'')\frac{\varphi^2}{zx}$$

$$+ 2(a'\cos\theta' + a''\cos\theta'')(b'\cos\theta' + b''\cos\theta'')\frac{\varphi^2}{xy};$$

ou, en développant et ordonnant par rapport à cos θ' et cos θ'' :

$$\frac{\Delta_1\varphi}{R}=\left(a'^2\frac{\varphi}{x^2}+b'^2\frac{\varphi}{y^2}+c'^2\frac{\varphi}{z^2}+2b'c'\frac{\varphi}{yz}+2c'a'\frac{\varphi}{zx}+2a'b'\frac{\varphi}{xy}\right)\cos^2\theta'$$

$$+\left(a''^2\frac{\varphi}{x^2}+b''^2\frac{\varphi}{y^2}+c''^2\frac{\varphi}{z^2}+2b''c''\frac{\varphi}{yz}+2c''a''\frac{\varphi}{zx}+2a''b''\frac{\varphi}{xy}\right)\cos^2\theta''$$

$$+2\left[a'a''\frac{\varphi}{x^2}+b'b''\frac{\varphi}{y^2}+c'c''\frac{\varphi}{z^2}+(b'c''+c'b'')\frac{\varphi}{yz}\right.$$

$$\left.+(c'a''+a'c'')\frac{\varphi}{zx}+(a'b''+b'a'')\frac{\varphi}{xy}\right].$$

Or, les coefficients des carrés $\cos^2\theta'$ et $\cos^2\theta''$ ne sont autre chose, d'après la formule (5), que $\frac{\Delta_1\varphi}{R'}$ et $\frac{\Delta_1\varphi}{R''}$, et le coefficient du rectangle cos θ' cos θ'' est nul d'après l'équation (22), que nous avons établie comme corollaire de la démonstration précédente. L'équation que nous venons d'écrire devient donc par ce moyen :

$$\frac{\Delta_1\varphi}{R}=\frac{\Delta_1\varphi}{R'}\cos^2\theta'+\frac{\Delta_1\varphi}{R''}\cos^2\theta'',$$

ou, en supprimant le facteur commun $\Delta_1\varphi$, et ne gardant qu'un seul angle θ, à cause de la propriété : $\theta'+\theta''=\frac{\pi}{2}$, que nous venons d'établir, cette formule prendra définitivement la forme :

$$(23) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{R}=\frac{1}{R'}\cos^2\theta+\frac{1}{R''}\sin^2\theta,$$

qui est celle que l'on trouve dans tous les traités d'analyse infinitésimale.

Nous mentionnerons seulement pour mémoire les deux conséquences que l'on tire immédiatement de cette formule, à savoir, d'abord, que deux sections normales symétriques par

$k = k_1 k_2.$

rapport à l'une des sections principales ont même courbure, et en second lieu, que la somme des courbures de deux sections normales perpendiculaires entre elles est constante, c'est-à-dire, que si l'on désigne par R_1 et R_2, les rayons de courbure des sections normales correspondant aux azimuts θ et $\theta + \frac{\pi}{2}$, on a, quel que soit θ :

$$(24). \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}.$$

$k_1 + k_2 = c_1 + c_2 = ct$

Revenons maintenant à l'équation du troisième degré (14) qui devait nous fournir les valeurs maxima et minima du rayon de courbure, et voyons quelles indications peut nous donner la formule (23) pour la discussion des racines de cette équation.

Si la quantité K est positive, les deux rayons principaux R' et R'' sont de même signe et du signe de H. Or, dans ce cas, la formule (23) montre que, quel que soit l'angle θ, la courbure ne pourra jamais s'annuler, et que le rayon de courbure est toujours de même signe que R' et R'', c'est-à-dire de même signe que H. Dans ces surfaces, en un point quelconque, il n'existe donc pas de direction qui corresponde à un rayon de courbure infini, et le rayon de courbure est toujours pour un même point dirigé suivant le même sens de la normale, comme, par exemple, dans l'ellipsoïde, ou le paraboloïde elliptique. Pour ces surfaces il faut donc rejeter la solution $\frac{1}{R} = 0$, et le rayon de courbure R varie entre les deux valeurs R' et R'' qui correspondent, l'une à un maximum et l'autre à un minimum.

Si, au contraire, la quantité K est négative, les deux rayons principaux R' et R'' étant de signes contraires, la courbure $\frac{1}{R}$ s'annulera pour deux directions symétriquement placées par rapport aux sections principales et données par la formule

$$\tang^2\theta = -\frac{R'}{R''}, \qquad \text{ou} \qquad \tang\theta = \pm\sqrt{\frac{-R'}{R''}};$$

et de plus, elle changera de signe de part et d'autre de chacune de ces directions. En un point quelconque, il y aura donc deux directions correspondant à des rayons de courbure infinis, et le rayon de courbure changera de sens sur la normale de part et d'autre de ces directions. Il faut donc admettre dans ce cas, pour l'équation (14), la solution $\frac{1}{R} = 0$, et, pour un même sens de la normale, le rayon de courbure variera en valeur absolue, depuis l'infini comme maximum, jusqu'à la valeur absolue de R′ ou R″ comme minimum. Tel est le cas, dans les surfaces du second ordre, de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique.

L'étude que nous venons d'achever ramenant désormais toutes les recherches relatives à la courbure à la considération de la seule équation du second degré (16), il ne nous reste plus qu'à connaître l'expression des deux quantités H et K, en fonction des dérivées partielles de la fonction φ, premier membre de l'équation de la surface, pour que nous puissions former immédiatement cette équation et en calculer les racines : c'est donc à la recherche de cette expression que nous allons consacrer la fin de ce paragraphe.

Pour obtenir ces développements, nous commencerons par former le tableau des neuf dérivées premières, des trois cosinus λ, μ, ν, en les écrivant ainsi qu'il suit :

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{x}=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\left(\frac{\varphi^2}{x^2}-\lambda\frac{\Delta_1\varphi}{x}\right), \quad \frac{\mu}{x}=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\left(\frac{\varphi^2}{yx}-\mu\frac{\Delta_1\varphi}{x}\right), \quad \frac{\nu}{x}=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\left(\frac{\varphi^2}{zx}-\nu\frac{\Delta_1\varphi}{x}\right),\\
&\frac{\lambda}{y}=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\left(\frac{\varphi^2}{xy}-\lambda\frac{\Delta_1\varphi}{y}\right), \quad \frac{\mu}{y}=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\left(\frac{\varphi^2}{y^2}-\mu\frac{\Delta_1\varphi}{y}\right), \quad \frac{\nu}{y}=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\left(\frac{\varphi^2}{zy}-\nu\frac{\Delta_1\varphi}{y}\right),\\
&\frac{\lambda}{z}=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\left(\frac{\varphi^2}{xz}-\lambda\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right), \quad \frac{\mu}{z}=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\left(\frac{\varphi^2}{yz}-\mu\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right), \quad \frac{\nu}{z}=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\left(\frac{\varphi^2}{z^2}-\nu\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right),
\end{aligned}\right.$$

d'où nous conclurons immédiatement :

$$(26).\quad H=\frac{\lambda}{x}+\frac{\mu}{y}+\frac{\nu}{z}=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\left[\frac{\varphi^2}{x^2}+\frac{\varphi^2}{y^2}+\frac{\varphi^2}{z^2}-\left(\lambda\frac{\Delta_1\varphi}{x}+\mu\frac{\Delta_1\varphi}{y}+\nu\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right)\right].$$

Or, on peut écrire successivement :

$$
(27)\quad \left\{
\begin{aligned}
\lambda\frac{\Delta_1\varphi}{x}+\mu\frac{\Delta_1\varphi}{y}+\nu\frac{\Delta_1\varphi}{z}&=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\Delta_1\varphi}{x}+\frac{\varphi}{y}\frac{\Delta_1\varphi}{y}+\frac{\varphi}{z}\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right)\\
&=\frac{1}{\Delta_1^2\varphi}\left(\frac{\varphi}{x}\cdot\Delta_1\varphi\frac{\Delta_1\varphi}{x}+\frac{\varphi}{y}\cdot\Delta_1\varphi\frac{\Delta_1\varphi}{y}+\frac{\varphi}{z}\cdot\Delta_1\varphi\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right)\\
&=\frac{1}{\Delta_1^2\varphi}\left(\frac{\varphi}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi}{x}+\frac{\varphi}{y}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi}{y}+\frac{\varphi}{z}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi}{z}\right)\\
&=\frac{1}{\Delta_1^2\varphi}\left[\frac{\varphi}{x}\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{x^2}+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{yx}+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{zx}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\varphi}{y}\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{xy}+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{y^2}+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{zy}\right)+\frac{\varphi}{z}\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{xz}+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{yz}+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{z^2}\right)\right]\\
&=\frac{1}{\Delta_1^2\varphi}\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}\right.\\
&\quad\left.+2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}+2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx}+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy}\right]=\frac{1}{\Delta_1^2\varphi}F\left(\frac{\varphi}{x},\frac{\varphi}{y},\frac{\varphi}{z}\right),
\end{aligned}\right.
$$

expression qui, étant substituée dans l'équation précédente, nous donnera définitivement pour H la valeur suivante :

$$
(28).\quad H=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\left[\Delta_2\varphi-\frac{1}{\Delta_1^2\varphi}F\left(\frac{\varphi}{x},\frac{\varphi}{y},\frac{\varphi}{z}\right)\right]=\frac{1}{\Delta_1^3\varphi}\left[\Delta_1^2\varphi.\Delta_2\varphi-F\left(\frac{\varphi}{x},\frac{\varphi}{y},\frac{\varphi}{z}\right)\right].
$$

Passons maintenant à K.

L'expression du coefficient K en fonction des dérivées partielles de φ paraît au premier abord excessivement compliquée, car chacune des dérivées $\frac{\Delta_1\varphi}{x}$, $\frac{\Delta_1\varphi}{y}$, $\frac{\Delta_1\varphi}{z}$ renfermant trois termes au numérateur, les dérivées $\frac{\lambda}{x}$, $\frac{\lambda}{y}$, $\frac{\lambda}{z}$, $\frac{\mu}{x}$ ..., supposées réduites à un seul dénominateur en multipliant et divisant par $\Delta_1^2\varphi$, en contiennent chacune six ; chaque produit de ces dérivées deux à deux en contient donc $6^2=36$, et comme il entre six de ces produits dans l'expression de K, nous devons *à priori* nous attendre à voir figurer dans son développement un nombre de termes égal à $6^3=216$, composé chacun de six facteurs, qu'il faudra classer et comparer pour les ordonner et faire les réductions convenables. Malgré ce que ce premier aperçu présente d'effrayant, on verra que, grâce à la symétrie, nous allons arriver assez facilement à un résultat relativement fort simple.

Pour cela, nous remarquerons d'abord que l'expression de K donnée par la formule (15) est la somme de trois différences telle que $\frac{\mu}{y}\frac{\nu}{z} - \frac{\mu}{z}\frac{\nu}{y}$ qui se déduisent les unes des autres en permutant en cercle respectivement λ, μ, ν, et x, y, z. L'inspection du tableau (25) montrant que les valeurs des neuf dérivées qui y sont inscrites se déduisent les unes des autres d'après la même loi, il suffira de calculer une seule de ces différences, et nous pourrons ensuite écrire immédiatement les deux autres à l'aide de permutations circulaires.

Calculant donc la première seulement, nous aurons successivement :

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{y}\frac{\nu}{z} &= \frac{1}{\Delta_1^2\varphi}\left(\frac{\varphi^2}{y^2} - \mu\frac{\Delta_1\varphi}{y}\right)\left(\frac{\varphi^2}{z^2} - \nu\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right)\\ &= \frac{1}{\Delta_1^2\varphi}\left[\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2} - \mu\frac{\Delta_1\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{z^2} - \nu\frac{\Delta_1\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{y^2} + \mu\nu\frac{\Delta_1\varphi}{y}\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right],\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{z}\frac{\nu}{y} &= \frac{1}{\Delta_1^2\varphi}\left(\frac{\varphi^2}{yz} - \mu\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right)\left(\frac{\varphi^2}{zy} - \nu\frac{\Delta_1\varphi}{y}\right)\\ &= \frac{1}{\Delta_1^2\varphi}\left[\left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2 - \nu\frac{\Delta_1\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{yz} - \mu\frac{\Delta_1\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{zy} + \mu\nu\frac{\Delta_1\varphi}{y}\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right],\end{aligned}$$

d'où, en retranchant, réduisant et ordonnant, nous aurons la première des trois équations :

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\mu}{y}\frac{\nu}{z} - \frac{\mu}{z}\frac{\nu}{y}\\ &= \frac{1}{\Delta_1^2\varphi}\left[\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2} - \left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2 - \frac{\Delta_1\varphi}{y}\left(\mu\frac{\varphi^2}{z^2} - \nu\frac{\varphi^2}{yz}\right) - \frac{\Delta_1\varphi}{z}\left(\nu\frac{\varphi^2}{y^2} - \mu\frac{\varphi^2}{yz}\right)\right],\\ &\frac{\nu}{z}\frac{\lambda}{x} - \frac{\nu}{x}\frac{\lambda}{z}\\ &= \frac{1}{\Delta_1^2\varphi}\left[\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{x^2} - \left(\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2 - \frac{\Delta_1\varphi}{z}\left(\nu\frac{\varphi^2}{x^2} - \lambda\frac{\varphi^2}{zx}\right) - \frac{\Delta_1\varphi}{x}\left(\lambda\frac{\varphi^2}{z^2} - \nu\frac{\varphi^2}{zx}\right)\right],\\ &\frac{\lambda}{x}\frac{\mu}{y} - \frac{\lambda}{y}\frac{\mu}{x}\\ &= \frac{1}{\Delta_1^2\varphi}\left[\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2} - \left(\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2 - \frac{\Delta_1\varphi}{x}\left(\lambda\frac{\varphi^2}{y^2} - \mu\frac{\varphi^2}{xy}\right) - \frac{\Delta_1\varphi}{y}\left(\mu\frac{\varphi^2}{x^2} - \lambda\frac{\varphi^2}{xy}\right)\right],\end{aligned}\right.$$

les deux autres en étant déduites successivement par permutation circulaire des λ, μ, ν et x, y, z.

Ajoutant maintenant ces trois différences pour former K, en vertu de l'expression (15), et posant un instant pour abréger l'écriture,

$$(29)\quad G=\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}+\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{x^2}+\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2}-\left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2-\left(\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2-\left(\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2,$$

nous obtiendrons successivement :

$$\begin{aligned}
K=&\frac{1}{\Delta_1^2\varphi}\left[G-\frac{\Delta_1\varphi}{x}\left(\lambda\frac{\varphi^2}{y^2}+\lambda\frac{\varphi^2}{z^2}-\mu\frac{\varphi^2}{xy}-\nu\frac{\varphi^2}{xz}\right)\right.\\
&\left.-\frac{\Delta_1\varphi}{y}\left(\mu\frac{\varphi^2}{z^2}+\mu\frac{\varphi^2}{x^2}-\nu\frac{\varphi^2}{yz}-\lambda\frac{\varphi^2}{xy}\right)-\frac{\Delta_1\varphi}{z}\left(\nu\frac{\varphi^2}{x^2}+\nu\frac{\varphi^2}{y^2}-\lambda\frac{\varphi^2}{zx}-\mu\frac{\varphi^2}{yz}\right)\right]\\
=&\frac{1}{\Delta_1^2\varphi}\left[G-\frac{\Delta_1\varphi}{x}\left(\lambda\Delta_2\varphi-\lambda\frac{\varphi^2}{x^2}-\mu\frac{\varphi^2}{xy}-\nu\frac{\varphi^2}{zx}\right)\right.\\
&\left.-\frac{\Delta_1\varphi}{y}\left(\mu\Delta_2\varphi-\lambda\frac{\varphi^2}{xy}-\mu\frac{\varphi^2}{y^2}-\nu\frac{\varphi^2}{yz}\right)-\frac{\Delta_1\varphi}{z}\left(\nu\Delta_2\varphi-\lambda\frac{\varphi^2}{zx}-\mu\frac{\varphi^2}{yz}-\nu\frac{\varphi^2}{z^2}\right)\right]\\
=&\frac{1}{\Delta_1^2\varphi}\left[G-\Delta_2\varphi\left(\lambda\frac{\Delta_1\varphi}{x}+\mu\frac{\Delta_1\varphi}{y}+\nu\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right)+\frac{\Delta_1\varphi}{x}\left(\lambda\frac{\varphi^2}{x^2}+\mu\frac{\varphi^2}{xy}+\nu\frac{\varphi^2}{zx}\right)\right.\\
&\left.+\frac{\Delta_1\varphi}{y}\left(\lambda\frac{\varphi^2}{xy}+\mu\frac{\varphi^2}{y^2}+\nu\frac{\varphi^2}{yz}\right)+\frac{\Delta_1\varphi}{z}\left(\lambda\frac{\varphi^2}{zx}+\mu\frac{\varphi^2}{yz}+\nu\frac{\varphi^2}{z^2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Or, comme nous avons par les valeurs (10),

$$\left\{\begin{aligned}
&\lambda\frac{\varphi^2}{x^2}+\mu\frac{\varphi^2}{xy}+\nu\frac{\varphi^2}{zx}=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{x^2}+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{yx}+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{zx}\right)=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi}{x}=\frac{\Delta_1\varphi}{x},\\
&\lambda\frac{\varphi^2}{xy}+\mu\frac{\varphi^2}{y^2}+\nu\frac{\varphi^2}{yz}=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{xy}+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{y^2}+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{zy}\right)=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi}{y}=\frac{\Delta_1\varphi}{y},\\
&\lambda\frac{\varphi^2}{zx}+\mu\frac{\varphi^2}{yz}+\nu\frac{\varphi^2}{z^2}=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{xz}+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{yz}+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{z^2}\right)=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi}{z}=\frac{\Delta_1\varphi}{z},
\end{aligned}\right.$$

la valeur précédente de K pourra s'écrire en y faisant ces substitutions, ainsi que celle indiquée par la formule (27) :

$$K = \frac{1}{\Delta_1^2\varphi}\left[G - \frac{\Delta_2\varphi}{\Delta_1^2\varphi}\,F\left(\frac{\varphi}{x}, \frac{\varphi}{y}, \frac{\varphi}{z}\right) + \left(\frac{\Delta_1\varphi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_1\varphi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right)^2\right],$$

ou mieux, en mettant en dénominateur commun $\Delta_1^2\varphi$,

$$K = \frac{1}{\Delta_1^4\varphi}\left[G\Delta_1^2\varphi - \Delta_2\varphi\,.\,F\left(\frac{\varphi}{x}, \frac{\varphi}{y}, \frac{\varphi}{z}\right) + \left(\Delta_1\varphi\,\frac{\Delta_1\varphi}{x}\right)^2 + \left(\Delta_1\varphi\,\frac{\Delta_1\varphi}{y}\right)^2 + \left(\Delta_1\varphi\,\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right)^2\right],$$

expression que nous pourrons encore écrire avec nos notations :

$$(30).\quad K = \frac{1}{\Delta_1^4\varphi}\left[G\Delta_1^2\varphi - \Delta_2\varphi\,.\,F\left(\frac{\varphi}{x}, \frac{\varphi}{y}, \frac{\varphi}{z}\right) + \frac{1}{4}\,\Delta_1^2(\Delta_1^2\varphi)\right],$$

car l'on a évidemment, d'après nos définitions,

$$\begin{aligned}\Delta_1^2(\Delta_1^2\varphi) &= \left(\frac{\Delta_1^2\varphi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_1^2\varphi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_1^2\varphi}{z}\right)^2 \\ &= \left(2\Delta_1\varphi\cdot\frac{\Delta_1\varphi}{x}\right)^2 + \left(2\Delta_1\varphi\cdot\frac{\Delta_1\varphi}{y}\right)^2 + \left(2\Delta_1\varphi\cdot\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right)^2.\end{aligned}$$

L'expression (30) de K étant, comme on le voit immédiatement, rationnelle par rapport aux dérivées partielles de φ, proposons-nous maintenant d'ordonner son numérateur, c'est-à-dire la quantité entre crochets, par rapport aux trois dérivées de premier ordre $\frac{\varphi}{x}$, $\frac{\varphi}{y}$, $\frac{\varphi}{z}$: on verra que nous arriverons ainsi à une expression très simple, ce qu'il était difficile de prévoir en partant de formules aussi compliquées.

Pour cela nous partagerons la quantité G (29) en deux parts, à savoir les termes carrés d'un côté, et les termes rectangles de l'autre ; et prenant d'abord les trois premiers, c'est-à-dire les termes rectangles, et les multipliant par le coefficient de G, $\Delta_1^2\varphi$, nous écrirons successivement :

$$\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]\left(\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}+\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{x^2}+\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2}\right)$$

$$=\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}+\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}\left(\frac{\varphi^2}{z^2}+\frac{\varphi^2}{y^2}\right)+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{x^2}+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}\left(\frac{\varphi^2}{x^2}+\frac{\varphi^2}{z^2}\right)$$

$$+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}\left(\frac{\varphi^2}{y^2}+\frac{\varphi^2}{x^2}\right)$$

$$=\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{x^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2}$$

$$+\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}\left(\Delta_2\varphi-\frac{\varphi^2}{x^2}\right)+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}\left(\Delta_2\varphi-\frac{\varphi^2}{y^2}\right)+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\left(\Delta_2\varphi-\frac{\varphi^2}{z^2}\right)$$

$$=\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{x^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2}$$

$$+\Delta_2\varphi\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}\right]-\left(\frac{\varphi}{x}\cdot\frac{\varphi^2}{x^2}\right)^2-\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{y^2}\right)^2-\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{z^2}\right)^2.$$

Prenant maintenant les trois derniers termes ou les carrés de G, multipliés encore par $\Delta_1^2\varphi$, et les rapprochant du dernier terme du numérateur de K, dans l'expression (30), qui est $\frac{1}{4}\Delta_1^2\,(\Delta_1^2\varphi)$, nous trouverons pour l'ensemble de ces termes :

$$-\Delta_1^2\varphi\left[\left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2+\left(\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2+\left(\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2\right]+\left(\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi}{x}\right)^2+\left(\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi}{z}\right)^2$$

$$=-\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2+\left(\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2+\left(\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2\right]$$

$$+\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{x^2}+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{yx}+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{xy}+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{y^2}+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{zy}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{xz}+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{yz}+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{z^2}\right)^2$$

$$=-\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2-\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2-\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2-\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2-\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2-\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2-\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2-\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{x^2}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{yx}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2 \\
&+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{yx}+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{zx}+2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}+\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{y^2}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{zy}\right)^2 \\
&+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy}\frac{\varphi^2}{y^2}+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\frac{\varphi^2}{zy}+2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{zy} \\
&+\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{xz}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{z^2}\right)^2+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{yz}+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{z^2}+2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{z^2} \\
&=-\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2-\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2-\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{x^2}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{y^2}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{z^2}\right)^2 \\
&+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\left(\frac{\varphi^2}{xy}\Delta_2\varphi-\frac{\varphi^2}{xy}\frac{\varphi^2}{z^2}+\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{yz}\right)+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\left(\frac{\varphi^2}{xz}\Delta_2\varphi-\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{y^2}+\frac{\varphi^2}{xy}\frac{\varphi^2}{zy}\right) \\
&+2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\left(\frac{\varphi^2}{yz}\Delta_2\varphi-\frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{z^2}+\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}\right)=-\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2-\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2-\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2 \\
&+\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{x^2}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{y^2}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{z^2}\right)^2+\Delta_2\varphi\left(2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy}+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xz}+2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}\right) \\
&+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\left(\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{yz}-\frac{\varphi^2}{xy}\frac{\varphi^2}{z^2}\right)+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\left(\frac{\varphi^2}{xy}\frac{\varphi^2}{zy}-\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{y^2}\right)+2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\left(\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}-\frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{x^2}\right),
\end{aligned}
$$

d'où, en ajoutant maintenant cette suite d'équations à la précédente, et comparant seulement les premiers et derniers membres, nous trouvons, en ayant égard à (29) :

$$
\begin{aligned}
&G\Delta_1^2\varphi+\left(\Delta_1\varphi\,\frac{\Delta_1\varphi}{x}\right)^2+\left(\Delta_1\varphi\,\frac{\Delta_1\varphi}{y}\right)^2+\left(\Delta_1\varphi\,\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right)^2 \\
&=\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\left\{\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}-\left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2\right\}+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\left\{\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{x^2}-\left(\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2\right\}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\left\{\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2}-\left(\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2\right\} \\
&+\Delta_2\varphi\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}+2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}+2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{zx}+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy}\right] \\
&+2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\left(\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}-\frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{x^2}\right)+2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\left(\frac{\varphi^2}{zy}\frac{\varphi^2}{xy}-\frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{y^2}\right)+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\left(\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{yz}-\frac{\varphi^2}{xy}\frac{\varphi^2}{z^2}\right),
\end{aligned}
$$

et, par conséquent, nous aurons pour le dénominateur cherché de K, en revenant à nos notations déjà employées:

$$G\Delta_1^2\varphi - \Delta^2\varphi\, F\left(\frac{\varphi}{x}, \frac{\varphi}{y}, \frac{\varphi}{z}\right) + \frac{1}{4}\Delta_1^2(\Delta_1^2\varphi) = \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 \left\{\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2} - \left(\frac{\varphi^2}{y^2}\right)^2\right\}$$

$$+ \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 \left\{\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{x^2} - \left(\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2\right\} + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2 \left\{\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2} - \left(\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2\right\}$$

$$+ 2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\left(\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx} - \frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{x^2}\right) + 2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\left(\frac{\varphi^2}{zy}\frac{\varphi^2}{xy} - \frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{y^2}\right) + 2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\left(\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{yz} - \frac{\varphi^2}{xy}\frac{\varphi^2}{z^2}\right),$$

qu'il suffira de reporter dans la formule (30) pour avoir la valeur définitive de K.

Si nous rapprochons ce résultat de la valeur (28) trouvée pour H, en la récrivant à nouveau, pour plus de clarté, sous forme explicite, on voit en définitive que nous avons trouvé pour H et K les deux expressions suivantes :

$$(31)\quad H = \frac{1}{\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \left[\left\{\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\varphi^2}{z}\right)\right\}\left(\frac{\varphi^2}{x^2} + \frac{\varphi^2}{y^2} + \frac{\varphi^2}{z^2}\right)\right.$$

$$\left. - \left\{\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2} + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2} + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2} + 2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz} + 2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx} + 2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy}\right\}\right].$$

$$(31)\ (suite)\quad K = \frac{1}{\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]^2} \left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 \left\{\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2} - \left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2\right\}\right.$$

$$+ \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 \left\{\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{x^2} - \left(\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2\right\} + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2 \left\{\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2} - \left(\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2\right\}$$

$$+ 2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\left(\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx} - \frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{x^2}\right) + 2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\left(\frac{\varphi^2}{zy}\frac{\varphi^2}{xy} - \frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{y^2}\right)$$

$$\left. + 2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\left(\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{y^2} - \frac{\varphi^2}{xy}\frac{\varphi^2}{z^2}\right)\right],$$

qui nous permettront de former immédiatement dans chaque cas particulier l'équation du second degré (16), et d'obtenir d'abord, au moyen d'elle, les rayons de courbure principaux, et ensuite d'en conclure par le moyen des équations (9) la direction des sections principales.

Afin de montrer la commodité de ces formules pour le calcul et la discussion des rayons de courbure, nous allons en faire l'application à un cas simple et intéressant, celui d'une surface à centre du second ordre.

Ayant donc posé dans ce cas :

$$2\varphi(x, y, z) = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1,$$

d'où :

$$\frac{\varphi}{x} = \frac{x}{A}, \quad \frac{\varphi}{y} = \frac{y}{B}, \quad \frac{\varphi}{z} = \frac{z}{C},$$

$$\frac{\varphi^2}{x^2} = \frac{1}{A}, \quad \frac{\varphi^2}{y^2} = \frac{1}{B}, \quad \frac{\varphi^2}{z^2} = \frac{1}{C},$$

$$\frac{\varphi^2}{yz} = 0, \quad \frac{\varphi^2}{zx} = 0, \quad \frac{\varphi^2}{xy} = 0,$$

nous en conclurons immédiatement :

$$(32) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_1^2\varphi &= \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 + \left(\frac{z}{C}\right)^2, \\ \Delta_2\varphi &= \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}, \\ F\left(\frac{\varphi}{x}, \frac{\varphi}{y}, \frac{\varphi}{z}\right) &= \frac{1}{A}\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \frac{1}{B}\left(\frac{y}{B}\right)^2 + \frac{1}{C}\left(\frac{z}{C}\right)^2; \end{aligned} \right.$$

et, p ar conséquent, en substituant dans les formules (31),

$$(33)\quad\left\{\begin{aligned}
H\Delta_1^5\varphi &= \left[\left(\frac{x}{A}\right)^2+\left(\frac{y}{B}\right)^2+\left(\frac{z}{C}\right)^2\right]\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\\
&\quad-\left[\frac{1}{A}\left(\frac{x}{A}\right)^2+\frac{1}{B}\left(\frac{y}{B}\right)^2+\frac{1}{C}\left(\frac{z}{C}\right)^2\right]\\
&=\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\left(\frac{x}{A}\right)^2+\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{A}\right)\left(\frac{y}{B}\right)^2+\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\left(\frac{z}{C}\right)^2,\\
K\Delta_1^4\varphi &= \frac{1}{BC}\left(\frac{x}{A}\right)^2+\frac{1}{CA}\left(\frac{y}{B}\right)^2+\frac{1}{AB}\left(\frac{z}{C}\right)^2\\
&=\frac{1}{ABC}\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}\right)=\frac{1}{ABC}.
\end{aligned}\right.$$

Arrêtons-nous d'abord un instant sur la seconde de ces formules. Si l'on se rappelle que l'on a $K=\frac{1}{R'R''}$, on voit qu'elle peut s'écrire :

$$(34)\ldots\quad \Delta_1^4\varphi=\frac{R'R''}{ABC}\qquad\text{ou}\qquad \Delta_1\varphi=\sqrt[4]{\frac{R'R''}{ABC}},$$

et, sous cette forme si simple, elle nous présente, d'une façon synthétique, le résultat de la discussion des rayons de courbure pour cette classe de surfaces ; car elle montre immédiatement que R′ et R″ (et par suite constamment R) seront de même signe si les trois coefficients A, B, C sont tous trois positifs, ou si deux d'entre eux sont négatifs, et qu'au contraire ils seront de signes contraires, si un seul de ces coefficients est négatif ; ce qui signifie qu'il n'y aura pas de rayons de courbure infinis, et par suite pas de droites sur l'ellipsoïde et l'hyperboloïde à deux nappes, et, au contraire, qu'il y en aura sur l'hyperboloïde à une nappe.

Remarquons, en second lieu, que le produit $\frac{R'R''}{ABC}$ devant toujours rester positif pour la réalité de $\Delta_1\varphi$, le nombre des facteurs négatifs est nécessairement pair, et, par conséquent, on n'altérera pas sa valeur si on remplace chaque facteur négatif par sa valeur absolue; en sorte que si on désigne par $\mathfrak{R}'$ et $\mathfrak{R}''$ les valeurs absolues des rayons de courbure R′ et R″, et par a, b, c les trois axes, on aura évidemment $\frac{R'R''}{ABC} = \frac{\mathfrak{R}'\mathfrak{R}''}{a^2b^2c^2}$, et la formule (34) mise sous la forme

$$\Delta_1\varphi = \frac{\sqrt[4]{\mathfrak{R}'\mathfrak{R}''}}{\sqrt{abc}},$$

fournira dès lors une interprétation géométrique très simple du paramètre différentiel $\Delta_1\varphi$, laquelle peut s'énoncer sous forme de théorème de la façon suivante :

« *Dans les surfaces à centre du second ordre, le paramètre différentiel du premier ordre est égal à la racine quatrième du produit des valeurs absolues des deux rayons de courbure principaux divisées par la racine carrée du produit des trois axes de la surface.* »

La seconde des formules (32) fournit de même une interprétation géométrique analogue du second paramètre différentiel $\Delta_2\varphi$, que l'on peut énoncer, en langage ordinaire, de la façon suivante :

« *Dans les surfaces à centre du second ordre, le paramètre différentiel du second ordre est la somme algébrique des inverses des carrés des trois axes de la surface, chacun de ces carrés étant pris avec le signe qui lui appartient dans l'équation de la surface.* »

Bornons-nous maintenant à considérer le cas de l'ellipsoïde, et proposons-nous de rechercher, à l'aide des formules qui précèdent, s'il existe sur cette surface des points pour lesquels les rayons de courbure de toutes les sections normales soient égaux (problème que nous résoudrons d'une façon générale dans le paragraphe V, en traitant de la recherche des *ombilics*). Pour cela, il faudra supposer dans ces formules A, B, C, tous trois positifs, et nous conviendrons de plus suivant l'usage de prendre $A > B > C$.

Les deux rayons de courbure principaux étant fournis par les deux racines de l'équation (16), c'est-à-dire par les valeurs

$$R' = \frac{1}{2}\left(H + \sqrt{H^2 - 4K}\right) \quad \text{et} \quad R'' = \frac{1}{2}\left(H - \sqrt{H^2 - 4K}\right),$$

il faudra, pour l'égalité de ces rayons, $H^2 - 4K = 0$, ou, ce qui est la même chose, $\Delta_1^6\varphi\,(H^2 - 4K) = 0$. Or, si nous nous reportons aux formules (33) et (32), nous obtiendrons pour cette condition l'équation :

$$\Delta_1^6\varphi\,(H^2 - 4K) = (H\Delta_1^3\varphi)^2 - 4\Delta_1^2\varphi\,(K\Delta_1^4\varphi)$$
$$= \left[\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right)\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{A}\right)\left(\frac{y}{B}\right)^2 + \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)\left(\frac{z}{C}\right)^2\right]^2$$
$$- \frac{4}{ABC}\left[\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 + \left(\frac{z}{C}\right)^2\right] = 0.$$

Les points cherchés (x, y, z) devant d'ailleurs toujours satisfaire à l'équation de la surface, laquelle peut s'écrire

$$A\left(\frac{x}{A}\right)^2 + B\left(\frac{y}{B}\right)^2 + C\left(\frac{z}{C}\right)^2 = 1,$$

on voit que, si nous posons pour plus de simplicité :

$$(35) \ldots \quad \left(\frac{x}{A}\right)^2 = x', \qquad \left(\frac{y}{B}\right)^2 = y', \qquad \left(\frac{z}{C}\right)^2 = z',$$

nous aurons en définitive à résoudre le système suivant :

$$(36)\ \left\{\begin{array}{l} \left[\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)x' + \left(\frac{1}{C}+\frac{1}{A}\right)y' + \left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)z'\right]^2 - \frac{4}{ABC}(x'+y'+z') = 0, \\ \qquad\qquad Ax' + By' + Cz' = 1. \end{array}\right.$$

Mais, si nous éliminons z' entre ces deux équations, nous obtiendrons celle-ci :

$$\left[(C - A)\frac{x'}{B} + (C - B)\frac{y'}{A} + \frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right]^2$$
$$- \frac{4}{AB}\left[(C - A)\,x' + (C - B)\,y' + 1\right] = 0,$$

laquelle, en ajoutant et retranchant le terme $2\,(C - B)\,\frac{y'}{A^2}$, peut se mettre sous la forme

$$\left[(C-A)\frac{x'}{B}+(C-B)\frac{y'}{A}-\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right]^2+4\,(B-C)\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\frac{y'}{A}=0,$$

et, par conséquent, équivaut aux deux suivantes, tous les facteurs du second terme étant positifs :

$$(C-A)\frac{x'}{B}+(C-B)\frac{y'}{A}-\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=0, \qquad \text{et} \qquad y'=0.$$

Or, la première se réduisant en vertu de la seconde à

$$(C-A)\frac{x'}{B}-\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=0, \qquad \text{ou} \qquad A\,(C-A)\,x'=B-A,$$

nous en tirerons donc

$$x'=\frac{1}{A}\left(\frac{A-B}{A-C}\right),$$

et en substituant cette valeur, ainsi que la valeur $y=0$, dans la seconde équation (36)

$$z'=\frac{1}{C}\left(\frac{B-C}{A-C}\right),$$

lesquelles, jointes à $y'=0$, déterminent complètement, par les valeurs (35), les points qui satisfont à la question. En posant, comme d'habitude $A=a^2$, $B=b^2$, $C=c^2$, on trouve donc ainsi que ces points ont pour coordonnées :

$$(37)\quad x=\frac{\pm a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}, \qquad y=0, \qquad z=\frac{\pm c\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}},$$

qui sont celles des *ombilics* de l'ellipsoïde.

Il suffit de chercher dans ce même exemple à traiter ce problème par la même méthode, en partant des valeurs correspondantes de H et de K exprimées en fonction des dérivées p, q, r, *s*, *t* que l'on trouve généralement dans les traités d'analyse, pour se convaincre que nos formules (31) conduisent beaucoup plus rapidement au but, et sont d'un usage à la fois beaucoup plus commode et beaucoup plus élégant. Et comme il en serait de même évidemment et *à fortiori* dans tout autre cas plus compliqué, ce simple exemple, emprunté à une question fort connue, nous paraît justifier suffisamment l'avantage de la méthode que nous avons suivie, et l'utilité des calculs que nous avons développés jusqu'ici dans ce travail.

III. — Courbe et surface indicatrices.

Les résultats qui précèdent peuvent être établis beaucoup plus rapidement, comme l'on sait, en considérant une certaine courbe, à laquelle Charles Dupin a donné le nom d'*indicatrice;* il nous faut donc montrer comment cette notion ressort immédiatement de nos formules.

Pour cela considérons, d'une part, la surface du second ordre ayant pour centre le point considéré, et dont l'équation est

$$(38)\ldots\quad F(X-x,\ Y-y,\ Z-z)=\pm 1;$$

la fonction F ayant toujours la signification précise que nous lui avons donnée jusqu'ici, c'est-à-dire en vertu de la formule (2) (§ I), la suivante :

$$\begin{aligned}&F(X-x,Y-y,Z-z)\\&=\frac{\varphi^2}{x^2}(X-x)^2+\frac{\varphi^2}{y^2}(Y-y)^2+\frac{\varphi^2}{z^2}(Z-z)^2\\&+2\frac{\varphi^2}{yz}(Y-y)(Z-z)+2\frac{\varphi^2}{zx}(Z-z)(X-x)+2\frac{\varphi^2}{xy}(X-x)(Y-y),\end{aligned}$$

et d'autre part, le rayon *r* de cette surface correspondant à la direction définie par les trois cosinus α, β, γ, et aboutissant au point X, Y, Z. Comme l'on a pour ce point :

$$X - x = r\alpha, \qquad Y - y = r\beta, \qquad Z - z = r\gamma,$$

nous aurons, en substituant dans l'équation de la surface (38), à cause de l'homogénéité de la fonction F :

$$r^2 F(\alpha, \beta, \gamma) = \pm 1.$$

On voit donc qu'en particulier pour les directions (a, b, c), situées dans le plan tangent de la surface primitivement considérée, si nous désignons par R, comme nous l'avons fait jusqu'ici, le rayon de courbure de la section normale de cette même surface, correspondant à cette direction, nous aurons, en vertu de la formule (5) (§ I) :

$$r^2 \frac{\Delta_1 \varphi}{R} = \pm . 1,$$

ou bien :

$$(39) \quad \ldots\ldots\ldots \quad r^2 = \frac{\pm 1}{\Delta_1 \varphi} \cdot R,$$

et nous conviendrons de prendre dans le second membre de l'équation (38) un signe tel, que nous obtenions ainsi pour r une valeur réelle.

La courbe d'intersection de la surface du second ordre (38) par le plan tangent à la surface considérée est donc telle que le rayon de cette courbe est proportionnel à la racine carrée du rayon de courbure de la section normale de la surface primitive, correspondant à la direction de ce rayon.

Cette courbe d'intersection est donc précisément celle à laquelle on donne le nom d'*indicatrice*, et nous appellerons de même, pour abréger le langage dans ce qui va suivre, *surface indicatrice* la surface du second ordre F, dont la considération précède et amène naturellement, ainsi que nous l'avons montré, celle de l'indicatrice proprement dite, et dont nous établirons tout à l'heure une propriété intéressante, qui suffira à lui motiver ce nom.

Cette courbe d'intersection étant ainsi nécessairement une courbe du second ordre, ayant pour centre le point considéré, il résultera immédiatement de la propriété fondamentale que nous venons d'établir, ainsi que des propriétés connues de cette classe de courbes :

1° Que les rayons de courbure maximum ou minimum, ou rayons principaux, correspondront aux axes ou diamètres principaux de cette courbe, et que, par conséquent, les sections principales seront rectangulaires entre elles;

2° Que deux sections normales symétriquement placées par rapport aux sections principales auront même courbure;

3° Que la somme des courbures de deux sections normales rectangulaires entre elles sera constante.

De cette propriété on peut encore déduire avec la même facilité la formule (23), car si nous supposons l'indicatrice rapportée dans un plan à ses diamètres principaux, comme axes coordonnés, elle aura une équation de la forme :

$$Ax^2 + By^2 = 1,$$

et par conséquent le rayon r de cette courbe, qui fait un angle θ avec l'axe des x, et pour lequel on a :

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

sera donné par la formule

$$\frac{1}{r^2} = A\cos^2\theta + B\sin^2\theta.$$

La courbure de la section normale correspondante sera donc en vertu de la formule (39) :

$$\frac{1}{R} = \frac{\pm 1}{\Delta_1\varphi}\frac{1}{r^2} = \frac{\pm 1}{\Delta_1\varphi}(A\cos^2\theta + B\sin^2\theta).$$

Or, si nous appelons R′ et R″ les rayons de courbure principaux, correspondant aux sections prises pour axe des x et pour axe des y, on voit immédiatement en faisant successivement $\theta = 0$, et $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans cette dernière formule que l'on a :

$$\frac{1}{R'} = \pm \frac{A}{\Delta_1\varphi} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R''} = \pm \frac{B}{\Delta_1\varphi},$$

d'où, en substituant dans l'équation précédente, on retombe immédiatement sur la formule

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'}\cos^2\theta + \frac{1}{R''}\sin^2\theta,$$

et l'on retrouve ainsi toutes les propriétés établies dans le paragraphe II.

On donne souvent de l'indicatrice une autre définition, qui consiste à dire qu'elle est une courbe semblable à l'intersection de la surface par son propre plan tangent au point considéré. Il nous est facile également de déduire cette propriété comme conséquence des formules que nous avons établies.

Considérons, en effet, d'abord l'intersection de cette surface par un plan parallèle au plan tangent et très voisin de ce plan, dont l'équation serait :

$$\frac{\varphi}{x}(X - x) + \frac{\varphi}{y}(Y - y) + \frac{\varphi}{z}(Z - z) = h,$$

h étant une quantité très petite; et écrivons l'équation de la surface, en la développant à l'aide de la formule de Taylor, bornée seulement aux premiers termes avec l'expression bien connue du reste (laquelle est ainsi applicable dans tous les cas) de la manière suivante :

$$\varphi(X, Y, Z) = \varphi\left(x + \overline{X - x}, y + \overline{Y - y}, z + \overline{Z - z}\right)$$

$$= \varphi(x, y, z) + \frac{\varphi}{x}(X - x) + \frac{\varphi}{y}(Y - y) + \frac{\varphi}{z}(Z - z)$$

$$+ \frac{1}{1.2}\left[\frac{\varphi^2}{x^2}(X - x)^2 + \frac{\varphi^2}{y^2}(Y - y)^2 + \cdots\right] + \frac{1}{1.2.3}\left[\frac{\varphi^3}{x^3}(X - x)^3 + \cdots\right] = 0.$$

La courbe d'intersection sera représentée par l'ensemble de ces deux équations ou un système formé d'une combinaison quelconque de ces équations, par exemple celui que l'on obtiendrait en joignant à la première celle-ci :

$$h+\frac{1}{1.2}\left[\frac{\varphi^2}{x^2}(X-x)^2+\frac{\varphi^2}{y^2}(Y-y)^2+\cdots\right]$$
$$+\frac{1}{1.2.3}\left[\frac{\varphi^3}{x^3}(X-x)^3+\cdots\right]=0;$$

car le premier terme du développement est nul, puisque l'on suppose le point (x, y, z) sur la surface.

Or, nous obtiendrons évidemment une courbe semblable à celle-ci, en remplaçant dans ce système les coordonnées $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, par $k(X-x)$, $k(Y-y)$, $k(Z-z)$, laquelle courbe serait alors représentée par le système :

$$k\left[\frac{\varphi}{x}(X-x)+\frac{\varphi}{y}(Y-y)+\frac{\varphi}{z}(Z-z)\right]=h,$$
$$h+\frac{k^2}{1.2}\left[\frac{\varphi^2}{x^2}(X-x)^2+\frac{\varphi^2}{y^2}(Y-y)^2+\cdots\right]$$
$$+\frac{k^3}{1.2.3}\left[\frac{\varphi^3}{x^3}(X-x)^3+\cdots\right]=0.$$

ou encore par celui-ci :

$$\frac{\varphi}{x}(X-x)+\frac{\varphi}{y}(Y-y)+\frac{\varphi}{z}(Z-z)=\frac{h}{k},$$
$$\frac{h}{k^2}+\frac{1}{1.2}\left[\frac{\varphi^2}{x^2}(X-x)^2+\frac{\varphi^2}{y^2}(Y-y)^2+\cdots\right]$$
$$+\frac{k}{1\ 2.3}\left[\frac{\varphi^3}{x^3}(X-x)^3+\cdots\right]=0.$$

Cela posé, si l'on fait tendre h et k simultanément vers zéro, mais en supposant h infiniment petit lui-même et du premier ordre par rapport à k, le rapport $\frac{h}{k}$ tendra vers la limite 0, et le rapport $\frac{h}{k^2}$ vers une constante finie, que l'on peut supposer être $\mp \frac{1}{2}$, puisque h et k sont jusqu'ici, sauf l'ordre de grandeur, complètement arbitraires. On voit donc qu'à la limite, lorsque le plan considéré se sera confondu avec le plan tangent à la surface proposée, la seconde équation coïncidera précisément avec celle de la surface indicatrice (38); et, par conséquent, la courbe indicatrice, telle que nous l'avons définie est bien une courbe semblable à l'intersection de la surface par son propre plan tangent.

Il nous reste maintenant à justifier le nom que nous avons proposé de *surface indicatrice* pour la surface du second ordre (38), en en montrant une propriété importante qui s'aperçoit presque immédiatement quand on se reporte à la théorie connue des surfaces du second ordre.

En effet, si l'on se rappelle que dans ces surfaces le plan tangent à l'extrémité d'un diamètre est parallèle au plan diamétral conjugué, et que l'on considère le plan tangent à la surface F à l'extrémité du diamètre de cette surface conjugué du plan tangent à la surface primitive φ, on verra d'abord immédiatement que les deux plans tangents seront parallèles; et si l'on se souvient en outre que dans ces mêmes surfaces les sections faites par des plans parallèles sont des courbes semblables et semblablement placées, on conclura sans peine de la proposition que nous venons d'établir que l'indicatrice de la surface F au même point sera homothétique de l'indicatrice de la surface primitive elle-même. Les rayons parallèles seront donc proportionnels dans les deux courbes, et, par conséquent, les courbures des sections normales parallèles seront aussi proportionnelles dans les deux surfaces.

La surface du second ordre F offre donc, au point particulier que nous venons de définir, une image fidèle des courbures de la surface proposée au point considéré, et présente, par conséquent, dans l'étude des courbures de cette dernière surface une importance analogue à celle du cercle osculateur dans l'étude des courbures d'une courbe quelconque. De même que ce cercle est la courbe la plus simple qui présente la courbure d'une courbe donnée en un point déterminé, de même la surface (38) est la surface la plus simple qui offre, de la façon que nous venons de dire, les mêmes grandeurs relatives, pour toutes les courbures des différentes sections normales, qu'une surface donnée en un point quelconque. Cette surface F mérite donc bien le nom de *surface indicatrice des courbures* de la surface primitive, ou simplement de *surface indicatrice*, que nous avons proposé de lui attribuer.

Nous avons établi cette proposition si simple en invoquant les propriétés connues des surfaces du second ordre, et celles de l'indicatrice que nous venions d'exposer; mais comme la considération de la surface F doit, selon nous, précéder et non suivre celle de l'indicatrice, nous croyons devoir montrer à nouveau, comment on établirait directement cette propriété fondamentale de la surface indicatrice, en la déduisant immédiatement de l'équation même (38) par laquelle nous l'avons définie, et sans passer par la considération intermédiaire de la courbe indicatrice, dont la notion naît au contraire si naturellement de celle de cette surface.

Appliquant donc dans ce but à la surface F la formule (6) du paragraphe I, le rayon de courbure R de cette surface relatif au point (X, Y, Z) et à la direction (a, b, c) sera donné par l'expression

$$(40)\quad R=\frac{\sqrt{\left(\frac{F}{X}\right)^2+\left(\frac{F}{Y}\right)^2+\left(\frac{F}{Z}\right)^2}}{a^2\frac{F^2}{X^2}+b^2\frac{F^2}{Y^2}+c^2\frac{F^2}{Z^2}+2bc\frac{F^2}{YZ}+2ca\frac{F^2}{ZX}+2ab\frac{F^2}{XY}},$$

et comme l'on a par ailleurs, en vertu de l'équation (38) :

$$\frac{F^2}{X^2}=\frac{\varphi^2}{x^2},\quad \frac{F^2}{Y^2}=\frac{\varphi^2}{y^2},\quad \frac{F^2}{Z^2}=\frac{\varphi^2}{z^2},$$

$$\frac{F^2}{YZ}=\frac{\varphi^2}{yz},\quad \frac{F^2}{ZX}=\frac{\varphi^2}{zx},\quad \frac{F^2}{XY}=\frac{\varphi^2}{xy},$$

la formule qui précède, rapprochée de la même formule (6) supposée appliquée à la surface φ, établirait immédiatement la proportionnalité des rayons de courbure pour un point quelconque de la surface F, si l'on pouvait prendre constamment dans ces deux formules un même système de valeurs pour a, b, c. Or, la direction (a, b, c) étant par hypothèse celle de la tangente d'une section normale, doit satisfaire pour la première surface à la condition

$$a\frac{F}{X} + b\frac{F}{Y} + c\frac{F}{Z} = 0,$$

et pour la seconde à cette autre

$$a\frac{\varphi}{x} + b\frac{\varphi}{y} + c\frac{\varphi}{z} = 0.$$

On voit donc qu'en général il n'y a qu'une seule direction, à savoir celle commune aux deux plans tangents, pour laquelle les dénominateurs des formules (40) et (6) coïncideront, ce qui exclut la loi de proportionnalité en question. En conséquence, cette loi sera seulement vérifiée pour les points exceptionnels de la surface F, pour lesquels les plans tangents sont parallèles dans les deux surfaces, et pour lesquels, par conséquent, les deux conditions qui précèdent n'en formant plus qu'une seule, on peut attribuer à a, b, c dans les formules (6) et (40) un même système de valeurs quelconques satisfaisant à cette équation unique et à la relation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Or, on voit que les seuls points de la surface F présentant cette particularité du parallélisme des deux plans tangents sont les extrémités du diamètre de cette surface conjugué du plan tangent de la surface primitive φ. — Si donc nous désignons par (X_0, Y_0, Z_0) l'un de ces points, et R_0 le rayon de courbure de la surface F relatif à ce point, les deux sections normales déterminées par une même direction de tangente (a, b, c) étant parallèles dans les deux surfaces à cause du parallélisme des normales, les formules (40) et (6) donneront pour les rayons de courbure de ces deux sections :

$$\frac{R_0}{R} = \frac{\sqrt{\left(\frac{F}{X}\right)_0^2 + \left(\frac{F}{Y}\right)_0^2 + \left(\frac{F}{x}\right)_0^2}}{\sqrt{\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2}},$$

rapport qui, étant indépendant de la direction (a, b, c), établit à nouveau la proposition déjà démontrée, laquelle se peut formuler en théorème de la façon suivante :

Théorème I. — « *Si l'on suppose construite la surface indicatrice* F *relative à un point déterminé d'une surface donnée* φ, *et que l'on considère l'extrémité du diamètre de cette surface* F *conjugué du plan tangent de la surface* φ *au point précité, les rayons de courbure relatifs à ces deux points, et correspondant à deux sections normales parallèles, seront proportionnels dans les deux surfaces.* »

La considération de la surface indicatrice nous sera encore fort utile, comme nous le verrons dans le paragraphe V, pour trouver les conditions d'égalité de tous les rayons de courbure en un même point d'une surface, c'est-à-dire pour obtenir une méthode générale propre à la détermination des *ombilics*. — Enfin nous n'abandonnerons pas ce sujet, sans avoir signalé encore un point intéressant, bien que d'importance secondaire, à propos duquel cette considération rend aussi un service fort appréciable.

On ne peut s'empêcher de penser, en voyant les symboles $\Delta_1\varphi$ et $\Delta_2\varphi$ revenir si fréquemment dans toutes les formules relatives à la courbure des surfaces, que ces quantités n'aient une signification géométrique simple, facilement exprimable en langage ordinaire, et l'on doit désirer une formule précise de l'interprétation de ces quantités pour une surface quelconque.

Pour la première la réponse est aisée et déjà connue depuis longtemps, à savoir que, si l'on considère la famille de surfaces $\varphi(x, y, z) = C$, où C désigne un paramètre variable, et deux points infiniment voisins, l'un (x, y, z) situé sur la surface $\varphi(x, y, z) = C$, et l'autre $(x + \delta x, \; y + \delta y, \; z + \delta z)$ situé sur la surface infiniment voisine $\varphi(x, y, z) = C + \delta C$, et satisfaisant par conséquent à l'équation

$$\varphi(x, y, z) + \frac{\varphi}{x}\delta x + \frac{\varphi}{y}\delta y + \frac{\varphi}{z}\delta z = C + \delta C,$$

ou simplement

$$\frac{\varphi}{x}\delta x + \frac{\varphi}{y}\delta y + \frac{\varphi}{z}\delta z = \delta C,$$

le rapport

$$\frac{\frac{\varphi}{x}\delta x + \frac{\varphi}{y}\delta y + \frac{\varphi}{z}\delta z}{\sqrt{\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2}} = \frac{\delta C}{\Delta_1 \varphi},$$

exprimera la projection sur la normale à la première surface au point (x, y, z) de la distance infiniment petite de ces deux points; et qu'en conséquence, si l'on suppose en particulier le second point situé également sur cette normale, on aura en appelant δn l'élément de normale compris entre les deux surfaces :

$$(40^{\text{bis}}). \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\delta C}{\Delta_1 \varphi} = \delta n, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta_1 \varphi = \frac{\delta C}{\delta n}.$$

Le paramètre différentiel du premier ordre $\Delta_1 \varphi$ exprime donc la limite du rapport de l'accroissement du paramètre à la distance normale de deux surfaces infiniment voisines de la même famille.

Pour le paramètre différentiel du second ordre $\Delta_2 \varphi$, la réponse n'est pas aussi facile, et Lamé, qui a introduit l'un des premiers dans la science la considération de ces paramètres et leur notation, propose simplement pour celui-là une interprétation fondée sur la considération des flux de chaleur, qui ne saurait trouver place dans une théorie pure d'analyse appliquée à la géométrie (*).

Or, c'est ici que la considération de la surface indicatrice va nous être d'un précieux concours, en nous fournissant une réponse simple et entièrement satisfaisante à ce dernier point de vue.

En effet, si nous désignons respectivement par $2l$, $2l'$, $2l''$ les longueurs des trois diamètres de la surface indicatrice dirigés suivant la normale à la surface primitive et les deux tangentes aux sections principales de cette même surface, ayant déjà par l'équation (39) :

$$\frac{1}{l'^2} = \frac{\pm \Delta_1 \varphi}{R'} \quad \text{et} \quad \frac{1}{l''^2} = \frac{\pm \Delta_1 \varphi}{R''},$$

nous obtiendrons immédiatement le troisième demi-diamètre l en éliminant les coordonnées (X, Y, Z) de son extrémité entre les équations de cette droite qui peuvent s'écrire :

$$\frac{X - x}{\frac{\varphi}{x}} = \frac{Y - y}{\frac{\varphi}{y}} = \frac{Z - z}{\frac{\varphi}{z}} = \frac{l}{\Delta_1 \varphi},$$

et l'équation de la surface indicatrice (38), ce qui donnera à cause de l'homogénéité de la fonction F,

$$\frac{l^2}{\Delta_1^2 \varphi} F\left(\frac{\varphi}{x}, \frac{\varphi}{y}, \frac{\varphi}{z}\right) = \pm 1,$$

d'où,

$$\frac{1}{\Delta_1^2 \varphi} F\left(\frac{\varphi}{x}, \frac{\varphi}{y}, \frac{\varphi}{z}\right) = \pm \frac{1}{l^2}.$$

Or, comme nous avons en général par la première égalité

(*) Voir *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § XVII, page 28.

(28), en nous rappelant que $H = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}$, et multipliant par $\Delta_1\varphi$:

$$\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right)\Delta_1\varphi = \Delta_2\varphi - \frac{1}{\Delta_1^2\varphi} F\left(\frac{\varphi}{x}, \frac{\varphi}{y}, \frac{\varphi}{z}\right),$$

nous trouverons immédiatement, en substituant dans cette dernière égalité les valeurs que nous venons d'écrire,

$$\pm \frac{1}{l'^2} \pm \frac{1}{l''^2} = \Delta_2\varphi \mp \frac{1}{l^2},$$

ou bien

$$(41) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \Delta_2\varphi = \pm \frac{1}{l^2} \pm \frac{1}{l'^2} \pm \frac{1}{l''^2},$$

équation qui fournit une interprétation géométrique très simple du paramètre différentiel $\Delta_2\varphi$, interprétation que nous formulerons par le théorème suivant :

Théorème II. — « *Le paramètre différentiel $\Delta_2\varphi$ est égal à la somme algébrique des inverses des carrés de trois demi-diamètres rectangulaires de la surface indicatrice, dirigés respectivement suivant la normale à la surface primitive et les tangentes aux deux sections principales de la même surface, le premier de ces carrés étant pris avec le signe du second membre de l'équation de la surface indicatrice, et les deux autres respectivement avec les signes des rayons de courbure principaux correspondants* (*). »

Remarquons enfin, comme dernière observation, qu'ayant déjà donné en terminant le paragraphe précédent, pour le cas particulier des surfaces à centre du second ordre, une interprétation géométrique des mêmes quantités $\Delta_1\varphi$ et $\Delta_2\varphi$ fondée sur des considérations toutes différentes, et qui par conséquent ne se

---

(*) Lorsque cette surface indicatrice est un ellipsoïde, on peut donc dire simplement, en vertu d'une propriété connue, que *le paramètre différentiel du second ordre $\Delta_2\varphi$ est la somme des inverses des carrés des trois axes de la surface indicatrice.*

confond pas avec celle que nous venons d'établir pour une surface quelconque, le rapprochement de ces deux interprétations constitue deux propriétés géométriques ou théorèmes relatifs aux surfaces à centre du second ordre. Toutefois, celui de ces théorèmes que l'on obtiendrait ainsi par la comparaison des deux interprétations de $\Delta_2\varphi$ est à la vérité fort connu, car on voit immédiatement, en se reportant aux formules du paragraphe précédent, que la surface indicatrice étant dans ce cas une surface identique à la surface proposée, l'égalité résultant de l'élimination du symbole $\Delta_2\varphi$ entre la seconde équation (32) et l'équation (41) exprimera simplement que la somme algébrique des inverses des carrés de trois diamètres rectangulaires de la surface proposée est constante, propriété fort connue et souvent rappelée, au moins pour l'ellipsoïde. Quant à l'autre théorème qui résulterait de même du rapprochement des deux interprétations du symbole $\Delta_1\varphi$ et que nous ne croyons pas nécessaire d'énoncer en toutes lettres, nous ne pensons pas qu'il ait été encore formulé, et il constitue par conséquent, croyons-nous, une propriété nouvelle des surfaces du second ordre.

En résumé, nous pensons donc qu'il y aurait utilité et avantage à introduire désormais dans la théorie de la courbure des surfaces la considération de *la surface indicatrice* sur laquelle nous venons d'appeler l'attention, et dont l'équation à la fois simple et symétrique se rattache si intimement aux formules qui constituent la base de cette théorie, et à en déduire ensuite la notion et les propriétés de l'indicatrice, qui en dérivent immédiatement, ainsi que nous l'avons fait voir en commençant ce paragraphe.

Ayant ainsi exposé tout ce qui a rapport à la courbure d'une surface en un point quelconque, nous allons maintenant, comme application, envisager le cas intéressant d'un *système triple orthogonal* de surfaces, en établissant le célèbre théorème de Charles Dupin, relatif à cet objet.

IV. — Système triple orthogonal de surfaces. Théorème de Charles Dupin. Formules de Lamé.

Les équations (9) ou (12) que nous avons données pour déterminer la direction des sections principales, contiennent implicitement le célèbre théorème de Charles Dupin, sur les *systèmes triples orthogonaux*, consistant en ce que « *trois surfaces formant un pareil système, c'est-à-dire se coupant réciproquement à angles droits, admettent pour intersections chacune leurs deux lignes de courbure.* »

Les lignes de courbure d'une surface étant en chaque point, comme l'on sait, dirigées suivant les sections principales relatives à ce point, il suffira pour établir ce théorème de montrer que, dans un système triple orthogonal, la courbe d'intersection de deux quelconques des surfaces est dirigée suivant l'une des sections principales, relatives au point commun, de chacune des deux surfaces; car il est facile de voir que, si l'on suppose cette condition remplie, chaque surface sera bien coupée par les deux autres suivant ses propres lignes de courbure.

En effet ayant désigné par φ, ψ, et ϖ les trois surfaces composant le système donné, supposons que nous laissions constantes les deux surfaces φ et ψ, et par conséquent aussi leur intersection que nous appellerons C, et que nous fassions varier le paramètre de la troisième surface ϖ, de manière à déplacer successivement le point commun aux trois surfaces tout le long de la courbe C, dans chacune de ses positions les trois courbes d'intersection étant par hypothèse dirigées suivant les sections principales de chacune des surfaces, on voit qu'en chacun de ses points la courbe C en particulier sera dirigée suivant l'une des sections principales de la surface φ relatives à ce point, et par conséquent elle coïncidera bien avec l'une des lignes de courbure de cette surface; il est évident d'ailleurs que l'on pourrait répéter successivement le même raisonnement pour chaque intersection, et pour chaque surface.

D'autre part, d'après la définition même du système orthogonal, l'intersection de deux quelconques des surfaces étant normale à la troisième, et par conséquent les tangentes aux trois courbes d'intersection au point commun étant précisément les trois normales au même point, l'énoncé auquel nous venons de ramener le théorème revient à dire que, au point commun, les normales de deux des surfaces sont dirigées dans le plan tangent de la troisième, précisément suivant les sections principales de cette dernière.

Soient donc, suivant les notations déjà employées, respectivement :

$$\lambda, \mu, \nu, \quad \lambda', \mu', \nu', \quad \lambda'', \mu'', \nu'',$$

les cosinus directeurs des normales au même point des trois surfaces

$$\varphi(x, y, z) = c, \quad \psi(x, y, z) = c', \quad \varpi(x, y, z) = c'',$$

composant le système triple orthogonal; d'après les explications qui précèdent, la proposition que nous voulons démontrer consistera en définitive en ce que les deux directions (λ', μ', ν') et $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ sont précisément les deux tangentes aux sections principales de la surface φ, et de même $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ et (λ, μ, ν) celles de la surface ψ, et enfin (λ, μ, ν) et $(\lambda' \mu', \nu')$ celles de la surface ϖ.

Telle est la proposition que nous allons établir successivement de deux façons différentes, mais pour cela il nous est nécessaire de rappeler auparavant que les neuf cosinus ci-dessus pouvant servir à définir un nouveau système d'axes coordonnés rectangulaires satisfont par hypothèse aux six relations bien connues :

$$(42). \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \\ \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = 1, \\ \lambda''^2 + \mu''^2 + \nu''^2 = 1, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'' = 0, \\ \lambda''\lambda + \mu''\mu + \nu''\nu = 0, \\ \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0, \end{array}\right.$$

ou, ce qui est la même chose, aux six suivantes :

$$(43). \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 = 1, \\ \mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2 = 1, \\ \nu^2 + \nu'^2 + \nu''^2 = 1, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \mu\nu + \mu'\nu' + \mu''\nu'' = 0, \\ \nu\lambda + \nu'\lambda' + \nu''\lambda'' = 0, \\ \lambda\mu + \lambda'\mu' + \lambda''\mu'' = 0, \end{array}\right.$$

ou encore aux neuf suivantes :

$$(44). \quad \left\{ \begin{array}{lll} \lambda = \mu'\nu'' - \nu'\mu'', & \lambda' = \mu''\nu - \nu''\mu, & \lambda'' = \mu\nu' - \nu\mu', \\ \mu = \nu'\lambda'' - \lambda'\nu'', & \mu' = \nu''\lambda - \lambda''\nu, & \mu'' = \nu\lambda' - \lambda\nu', \\ \nu = \lambda'\mu'' - \mu'\lambda'', & \nu' = \lambda''\mu - \mu''\lambda, & \nu'' = \lambda\mu' - \mu\lambda', \end{array} \right.$$

en supposant que les nouveaux axes présentent la même disposition que les anciens, ce que nous avons évidemment le droit de faire, puisque nous pouvons prendre arbitrairement le sens considéré sur chaque normale. Ces préliminaires établis, il est facile de déduire des équations (9) ou (12), la démonstration du théorème énoncé.

Première démonstration. — A cause de la symétrie complète entre les trois surfaces, chacune d'elles pouvant être prise indifféremment pour la surface φ, il suffira évidemment de montrer que les directions (λ', μ', ν') et $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ sont bien les deux tangentes aux sections principales de la surface $\varphi(x, y, z) = c$; ce qui s'établira en prouvant que les deux systèmes λ', μ', ν' et λ'', μ'', ν'', satisfont l'un et l'autre aux équations (9) ou (12) qui déterminent les sections principales de cette surface, dans lesquelles R est censé représenter la fonction de a, b, c, définie par l'équation (5), c'est-à-dire que, si l'on pose, pour abréger,

$$(45). \quad . \quad . \quad \frac{\Delta_1\varphi}{R_1} = F(\lambda', \mu', \nu'), \quad \frac{\Delta_1\varphi}{R_2} = F(\lambda'', \mu'', \nu''),$$

R_1 et R_2 représentant ainsi par hypothèse les rayons de courbure des sections normales correspondant aux directions (λ', μ', ν') et $(\lambda'', \mu'', \nu'')$, on a bien par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\varphi}{x}\,\Pi(\lambda', \mu', \nu') - \dfrac{dF}{d\lambda'}\,\Delta_1^2\varphi = -\,2\lambda'\,\dfrac{\Delta_1^3\varphi}{R_1}, \\ \dfrac{\varphi}{y}\,\Pi(\lambda', \mu', \nu') - \dfrac{dF}{d\mu'}\,\Delta_1^2\varphi = -\,2\mu'\,\dfrac{\Delta_1^3\varphi}{R_1}, \\ \dfrac{\varphi}{z}\,\Pi(\lambda', \mu', \nu') - \dfrac{dF}{d\nu'}\,\Delta_1^2\varphi = -\,2\nu'\,\dfrac{\Delta_1^3\varphi}{R_1}, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\varphi}{x}\,\Pi(\lambda'',\mu'',\nu'')-\frac{dF}{d\lambda''}\,\Delta_1^2\varphi=-2\lambda''\,\frac{\Delta_1^3\varphi}{R_2},\\
&\frac{\varphi}{y}\,\Pi(\lambda'',\mu'',\nu'')-\frac{dF}{d\mu''}\,\Delta_1^2\varphi=-2\mu''\,\frac{\Delta_1^3\varphi}{R_2},\\
&\frac{\varphi}{z}\,\Pi(\lambda'',\mu'',\nu'')-\frac{dF}{d\nu''}\,\Delta_1^2\varphi=-2\nu''\,\frac{\Delta_1^3\varphi}{R_2},
\end{aligned}\right.$$

ou l'un des deux systèmes d'équations seulement; car, s'il est établi que l'une des deux directions correspond à l'une des sections principales, l'autre direction qui est perpendiculaire à la première par hypothèse correspondra nécessairement à l'autre section principale.

Pour établir ce résultat relativement à la première direction (λ', μ', ν'), nous poserons :

$$\left\{\begin{aligned}
A&=\frac{\varphi}{x}\,\Pi(\lambda',\mu',\nu')-\frac{dF}{d\lambda'}\,\Delta_1^2\varphi+2\lambda'\,\frac{\Delta_1^3\varphi}{R_1},\\
B&=\frac{\varphi}{y}\,\Pi(\lambda',\mu',\nu')-\frac{dF}{d\mu'}\,\Delta_1^2\varphi+2\mu'\,\frac{\Delta_1^3\varphi}{R_1},\\
C&=\frac{\varphi}{z}\,\Pi(\lambda',\mu',\nu')-\frac{dF}{d\nu'}\,\Delta_1^2\varphi+2\nu'\,\frac{\Delta_1^3\varphi}{R_1};
\end{aligned}\right.$$

et nous démontrerons que les trois quantités A, B, C sont toutes trois nulles, en établissant entre elles trois relations linéaires et homogènes, assez faciles à obtenir, et qui, ayant leur déterminant différent de zéro, ne peuvent être satisfaites que par des valeurs nulles de ces quantités.

En effet, en multiplant d'abord les équations qui précèdent respectivement par λ, μ, ν, et ajoutant, on obtient en ayant égard successivement aux valeurs (10), aux formules (42) et à l'équation de définition (8)

$$\begin{aligned}
\lambda A+\mu B+\nu C&=\left(\lambda\frac{\varphi}{x}+\mu\frac{\varphi}{y}+\nu\frac{\varphi}{z}\right)\Pi(\lambda',\mu',\nu')\\
&\quad-\left(\lambda\frac{dF}{d\lambda'}+\mu\frac{dF}{d\mu'}+\nu\frac{dF}{d\nu'}\right)\Delta_1^2\varphi+2(\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu')\frac{\Delta_1^3\varphi}{R_1}\\
&=\Delta_1\varphi\cdot\Pi(\lambda',\mu',\nu')-\left(\frac{\varphi}{x}\frac{dF}{d\lambda'}+\frac{\varphi}{y}\frac{dF}{d\mu'}+\frac{\varphi}{z}\frac{dF}{d\nu'}\right)\Delta_1\varphi=0.
\end{aligned}$$

De même, si nous remarquons qu'en raison des valeurs (10) les deux dernières formules de gauche (42) peuvent s'écrire,

$$(46). \quad \lambda' \frac{\varphi}{x} + \mu' \frac{\varphi}{y} + \nu' \frac{\varphi}{z} = 0, \quad \lambda'' \frac{\varphi}{x} + \mu'' \frac{\varphi}{y} + \nu'' \frac{\varphi}{z} = 0,$$

nous obtiendrons, en ajoutant encore les mêmes équations respectivement multipliées par λ', μ', ν', et tenant compte de l'homogénéité de la fonction F, ainsi que de la valeur ci-dessus (45) de R_1 et des formules (42) :

$$\lambda' A + \mu' B + \nu' C = \left(\lambda' \frac{\varphi}{x} + \mu' \frac{\varphi}{y} + \nu' \frac{\varphi}{z}\right) \Pi(\lambda', \mu', \nu')$$
$$- \left(\lambda' \frac{dF}{d\lambda'} + \mu' \frac{dF}{d\mu'} + \nu' \frac{dF}{d\nu'}\right) \Delta_1^2\varphi + 2(\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2) \frac{\Delta_1^3\varphi}{R_1} = 0.$$

Enfin, ajoutant encore une dernière fois les mêmes équations respectivement multipliées par λ'', μ'', ν'', et ayant égard aux équations (46) que nous venons d'écrire, aux formules (42) et à l'équation de définition (2), nous obtiendrons de même :

$$\lambda'' A + \mu'' B + \nu'' C = \left(\lambda'' \frac{\varphi}{x} + \mu'' \frac{\varphi}{y} + \nu'' \frac{\varphi}{z}\right) \Pi(\lambda', \mu', \nu')$$
$$- \left(\lambda'' \frac{dF}{d\lambda'} + \mu'' \frac{dF}{d\mu'} + \nu'' \frac{dF}{d\nu'}\right) \Delta_1^2\varphi + 2(\lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'') \frac{\Delta_1^3\varphi}{R_1}$$
$$= -2 \left[\lambda'' \left(\lambda' \frac{\varphi^2}{x^2} + \mu' \frac{\varphi^2}{xy} + \nu' \frac{\varphi^2}{zx}\right) + \mu'' \left(\lambda' \frac{\varphi^2}{xy} + \mu' \frac{\varphi^2}{y^2} + \nu' \frac{\varphi^2}{yz}\right)\right.$$
$$\left. + \nu'' \left(\lambda' \frac{\varphi^2}{zx} + \mu' \frac{\varphi^2}{yz} + \nu' \frac{\varphi^2}{z^2}\right)\right] \Delta_1^2\varphi$$
$$= -2 \left[\lambda'\lambda'' \frac{\varphi^2}{x^2} + \mu'\mu'' \frac{\varphi^2}{y^2} + \nu'\nu'' \frac{\varphi^2}{z^2}\right.$$
$$\left. + (\mu'\nu'' + \nu'\mu'') \frac{\varphi^2}{yz} + (\nu'\lambda'' + \lambda'\nu'') \frac{\varphi^2}{zx} + (\lambda'\mu'' + \mu'\lambda'') \frac{\varphi^2}{xy}\right] \Delta_1^2\varphi,$$

ou simplement, en vertu des formules (10) supposées appliquées aux surfaces ψ et ϖ,

$$(47). \quad . \quad . \quad . \quad \lambda'' A + \mu'' B + \nu'' C = -\frac{2\Delta_1^2\varphi}{\Delta_1\psi\Delta_1\varpi} \cdot L,$$

en posant pour abréger :

$$L = \frac{\psi}{x}\frac{\varpi}{x}\frac{\varphi^2}{x^2} + \frac{\psi}{y}\frac{\varpi}{y}\frac{\varphi^2}{y^2} + \frac{\psi}{z}\frac{\varpi}{z}\frac{\varphi^2}{z^2}$$

$$+ \left(\frac{\psi}{y}\frac{\varpi}{z} + \frac{\psi}{z}\frac{\varpi}{y}\right)\frac{\varphi^2}{yz} + \left(\frac{\psi}{z}\frac{\varpi}{x} + \frac{\psi}{x}\frac{\varpi}{z}\right)\frac{\varphi^2}{zx} + \left(\frac{\psi}{x}\frac{\varpi}{y} + \frac{\psi}{y}\frac{\varpi}{x}\right)\frac{\varphi^2}{xy}.$$

Or, il est facile de voir que cette dernière quantité est nulle, et, par conséquent, aussi le second membre de l'équation qui précède, en posant de même par permutation circulaire des trois lettres φ, ψ et ϖ :

$$M = \frac{\varpi}{x}\frac{\varphi}{x}\frac{\psi^2}{x^2} + \frac{\varpi}{y}\frac{\varphi}{y}\frac{\psi^2}{y^2} + \frac{\varpi}{z}\frac{\varphi}{z}\frac{\psi^2}{z^2}$$

$$+ \left(\frac{\varpi}{y}\frac{\varphi}{z} + \frac{\varpi}{z}\frac{\varphi}{y}\right)\frac{\psi^2}{yz} + \left(\frac{\varpi}{z}\frac{\varphi}{x} + \frac{\varpi}{x}\frac{\varphi}{z}\right)\frac{\psi^2}{zx} + \left(\frac{\varpi}{x}\frac{\varphi}{y} + \frac{\varpi}{y}\frac{\varphi}{x}\right)\frac{\psi^2}{xy},$$

$$N = \frac{\varphi}{x}\frac{\psi}{x}\frac{\varpi^2}{x^2} + \frac{\varphi}{y}\frac{\psi}{y}\frac{\varpi^2}{y^2} + \frac{\varphi}{z}\frac{\psi}{z}\frac{\varpi^2}{z^2}$$

$$+ \left(\frac{\varphi}{y}\frac{\psi}{z} + \frac{\varphi}{z}\frac{\psi}{y}\right)\frac{\varpi^2}{yz} + \left(\frac{\varphi}{z}\frac{\psi}{x} + \frac{\varphi}{x}\frac{\psi}{z}\right)\frac{\varpi^2}{zx} + \left(\frac{\varphi}{x}\frac{\psi}{y} + \frac{\varphi}{y}\frac{\psi}{x}\right)\frac{\varpi^2}{xy},$$

et se reportant aux trois formules de gauche (42) qui expriment l'orthogonalité du système et qui peuvent s'écrire en vertu des formules (10), supposées appliquées successivement aux trois surfaces :

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\psi}{x}\frac{\varpi}{x} + \frac{\psi}{y}\frac{\varpi}{y} + \frac{\psi}{z}\frac{\varpi}{z} = 0, \\ &\frac{\varpi}{x}\frac{\varphi}{x} + \frac{\varpi}{y}\frac{\varphi}{y} + \frac{\varpi}{z}\frac{\varphi}{z} = 0, \\ &\frac{\varphi}{x}\frac{\psi}{x} + \frac{\varphi}{y}\frac{\psi}{y} + \frac{\varphi}{z}\frac{\psi}{z} = 0; \end{aligned} \right.$$

car, si l'on différentie la première, par exemple, successivement par rapport à x, y et z, ce qui donne :

$$(48^{bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\varpi}{x}\frac{\psi^2}{x^2} + \frac{\varpi}{y}\frac{\psi^2}{yx} + \frac{\varpi}{z}\frac{\psi^2}{zx} + \frac{\psi}{x}\frac{\varpi^2}{x^2} + \frac{\psi}{y}\frac{\varpi^2}{yx} + \frac{\psi}{z}\frac{\varpi^2}{zx} = 0, \\ &\frac{\varpi}{x}\frac{\psi^2}{xy} + \frac{\varpi}{y}\frac{\psi^2}{y^2} + \frac{\varpi}{z}\frac{\psi^2}{zy} + \frac{\psi}{x}\frac{\varpi^2}{xy} + \frac{\psi}{y}\frac{\varpi^2}{y^2} + \frac{\psi}{z}\frac{\varpi^2}{zy} = 0, \\ &\frac{\varpi}{x}\frac{\psi^2}{xz} + \frac{\varpi}{y}\frac{\psi^2}{yz} + \frac{\varpi}{z}\frac{\psi^2}{z^2} + \frac{\psi}{x}\frac{\varpi^2}{xz} + \frac{\psi}{y}\frac{\varpi^2}{yz} + \frac{\psi}{z}\frac{\varpi^2}{z^2} = 0, \end{aligned} \right.$$

et que l'on ajoute ensuite ces dernières équations respectivement multipliées par $\frac{\varphi}{x}$, $\frac{\varphi}{y}$, $\frac{\varphi}{z}$, on voit qu'on obtiendra précisément la première des trois équations suivantes :

$$M + N = 0, \quad N + L = 0, \quad L + M = 0;$$

les deux autres résultant évidemment de la simple permutation circulaire des trois lettres φ, ψ et ϖ, puisque les trois équations (48), qui nous ont servi de point de départ dans ce dernier calcul, se déduisent elles-mêmes les unes des autres par la même loi.

Or, ces trois dernières équations donnent évidemment, en retranchant successivement chacune de la somme des deux autres,

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0;$$

et, par conséquent, en substituant dans le second membre de l'équation (47), nous aurons la troisième relation :

$$\lambda''A + \mu''B + \nu''C = 0.$$

Nous avons donc, en définitive, trouvé ainsi, pour déterminer les trois quantités A, B, C, le système des trois équations linéaires et homogènes :

$$(49)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} \lambda A + \mu B + \nu C = 0, \\ \lambda' A + \mu' B + \nu' C = 0, \\ \lambda'' A + \mu'' B + \nu'' C = 0, \end{cases}$$

lequel, ayant pour déterminant, en vertu des formules (44) et (43),

$$\lambda(\mu'\nu'' - \nu'\mu'') + \lambda'(\mu''\nu - \nu''\mu) + \lambda''(\mu\nu' - \nu\mu') = \lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 = 1,$$

c'est-à-dire une quantité différente de zéro, n'admet que le seul système de solution $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$; ce qui montre que la direction (λ', μ', ν') est bien la tangente à l'une des sections principales de la surface φ, et, par conséquent, la direction perpendiculaire (λ'', μ'', ν'') est forcément de même la tangente à l'autre section principale.

Nous venons d'établir que la direction (λ', μ', ν') satisfaisait bien aux équations qui déterminent les sections principales de la surface φ, en prenant ces équations sous la forme (9) qui est la première sous laquelle nous les avons rencontrées; mais il eût été tout aussi facile pour établir ce résultat de prendre ces mêmes équations sous la forme (12). Nous serions ainsi arrivés aussi aisément, quoique par d'autres raisons, au même système (49) pour déterminer A, B, C, d'où nous aurions tiré les mêmes conclusions. Nous ne recommencerons pas le calcul sous cette forme, parce que, le but et la méthode de la démonstration restant les mêmes, l'intérêt de ce nouveau calcul paraîtrait médiocre; mais si le lecteur tient à faire la comparaison de ces deux procédés, afin de pouvoir faire en connaissance de cause un choix entre les deux, il lui sera facile d'extraire textuellement ce second calcul des développements que nous allons présenter à propos de la seconde démonstration du même théorème, laquelle sera basée, quoique avec une méthode différente, sur la considération de cette seconde forme d'équations (12).

Avant de commencer cette démonstration, nous devons déclarer également que nous ne la recommandons pas comme méthode d'exposition, bien que la méthode en soit celle même indiquée par la position de la question, parce que les écritures en sont un peu longues et l'appareil un peu compliqué; mais nous croyons néanmoins devoir la développer ici, parce qu'elle fournit un bon exemple de calcul, et qu'elle nous mettra en même temps sur la voie d'autres propriétés géométriques intéressantes du système orthogonal, découvertes par Lamé au moyen de l'emploi des coordonnées curvilignes.

II^e Démonstration. — L'esprit de cette démonstration consiste à vérifier simultanément pour les trois surfaces du système par une méthode analogue à celle que nous avons déjà employée dans la démonstration précédente, que les normales des trois surfaces au point commun sont bien en même temps les tangentes aux sections principales des mêmes surfaces relatives au même point. En d'autres termes, nous nous proposerons d'établir à la fois que les directions (λ', μ', ν') et $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ satisfont bien aux équations (12) pour la surface φ, et de même les directions $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ et (λ, μ, ν) pour la surface ψ et les directions (λ, μ, ν) et (λ', μ', ν') pour la surface ϖ.

Pour cela, définissant, comme tout à l'heure, R_1 et R_2 par les équations (45), c'est-à-dire appelant encore R_1 et R_2 les deux rayons de courbure des sections normales de la surface φ correspondant aux directions (λ', μ', ν') et $(\lambda'', \mu'', \nu'')$, et de même par analogie R'_1, et R'_2, ceux de la surface ψ correspondant aux directions $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ et (λ, μ, ν), et enfin R''_1 et R''_2 ceux de la surface ϖ correspondant aux directions (λ, μ, ν) et (λ', μ', ν'), et ayant posé simultanément :

$$(49^{bis})\quad\left\{\begin{array}{ll}
\left\{\begin{aligned}
A_1 &= \lambda'\frac{\lambda}{x} + \mu'\frac{\lambda}{y} + \nu'\frac{\lambda}{z} - \frac{\lambda'}{R_1},\\
B_1 &= \lambda'\frac{\mu}{x} + \mu'\frac{\mu}{y} + \nu'\frac{\mu}{z} - \frac{\mu'}{R_1},\\
C_1 &= \lambda'\frac{\nu}{x} + \mu'\frac{\nu}{y} + \nu'\frac{\nu}{z} - \frac{\nu'}{R_1},
\end{aligned}\right. &
\left\{\begin{aligned}
A_2 &= \lambda''\frac{\lambda}{x} + \mu''\frac{\lambda}{y} + \nu''\frac{\lambda}{z} - \frac{\lambda''}{R_2},\\
B_2 &= \lambda''\frac{\mu}{x} + \mu''\frac{\mu}{y} + \nu''\frac{\mu}{z} - \frac{\mu''}{R_2},\\
C_2 &= \lambda''\frac{\nu}{x} + \mu''\frac{\nu}{y} + \nu''\frac{\nu}{z} - \frac{\nu''}{R_2},
\end{aligned}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{aligned}
A'_1 &= \lambda''\frac{\lambda'}{x} + \mu''\frac{\lambda'}{y} + \nu''\frac{\lambda'}{z} - \frac{\lambda''}{R'_1},\\
B'_1 &= \lambda''\frac{\mu'}{x} + \mu''\frac{\mu'}{y} + \nu''\frac{\mu'}{z} - \frac{\mu''}{R'_1},\\
C'_1 &= \lambda''\frac{\nu'}{x} + \mu''\frac{\nu'}{y} + \nu''\frac{\nu'}{z} - \frac{\nu''}{R'_1},
\end{aligned}\right. &
\left\{\begin{aligned}
A'_2 &= \lambda\frac{\lambda'}{x} + \mu\frac{\lambda'}{y} + \nu\frac{\lambda'}{z} - \frac{\lambda}{R'_2},\\
B'_2 &= \lambda\frac{\mu'}{x} + \mu\frac{\mu'}{y} + \nu\frac{\mu'}{z} - \frac{\mu}{R'_2},\\
C'_2 &= \lambda\frac{\nu'}{x} + \mu\frac{\nu'}{y} + \nu\frac{\nu'}{z} - \frac{\nu}{R'_2},
\end{aligned}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{aligned}
A''_1 &= \lambda\frac{\lambda''}{x} + \mu\frac{\lambda''}{y} + \nu\frac{\lambda''}{z} - \frac{\lambda}{R''_1},\\
B''_1 &= \lambda\frac{\mu''}{x} + \mu\frac{\mu''}{y} + \nu\frac{\mu''}{z} - \frac{\mu}{R''_1},\\
C''_1 &= \lambda\frac{\nu''}{x} + \mu\frac{\nu''}{y} + \nu\frac{\nu''}{z} - \frac{\nu}{R''_1},
\end{aligned}\right. &
\left\{\begin{aligned}
A''_2 &= \lambda'\frac{\lambda''}{x} + \mu'\frac{\lambda''}{y} + \nu'\frac{\lambda''}{z} - \frac{\lambda'}{R''_2},\\
B''_2 &= \lambda'\frac{\mu''}{x} + \mu'\frac{\mu''}{y} + \nu'\frac{\mu''}{z} - \frac{\mu'}{R''_2},\\
C''_2 &= \lambda'\frac{\nu''}{x} + \mu'\frac{\nu''}{y} + \nu'\frac{\nu''}{z} - \frac{\nu'}{R''_2},
\end{aligned}\right.
\end{array}\right.$$

Nous démontrerons que les dix-huit quantités A, B, C ci-dessus sont toutes nulles à la fois, ce qui établira bien que la direction de chaque normale satisfait aux équations (12) pour les deux autres surfaces, puisque dans ces équations (12) R représente par hypothèse le rayon de courbure de la section normale correspondant à la direction (a, b, c) ou en d'autres termes la fonction de a, b, c définie par l'équation (5). Et il sera établi par là même, par voie de conséquence, que R_1 et R_2, R'_1 et R'_2, R''_1 et R''_2 sont bien les rayons de courbure principaux respectivement des surfaces φ, ψ et ϖ.

Nous arriverons comme tout à l'heure à ce résultat en établissant, entre les dix-huit quantités A, B, C considérées, dix-huit relations linéaires et homogènes qui ne peuvent être vérifiées que par des valeurs nulles de ces quantités.

A cet effet, nous bornant d'abord à considérer les six quantités A, B, C qui sont relatives à une même surface, à la surface φ par exemple, nous formerons sans peine les cinq combinaisons suivantes :

1° D'abord, en vertu des équations (42),

$$\lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1 = \lambda' \frac{d}{dx}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + \mu' \frac{d}{dy}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$$
$$+ \nu' \frac{d}{dz}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - \frac{1}{R_1}(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu') = 0,$$

et, pour la même raison,

$$\lambda A_2 + \mu B_2 + \nu C_2 = \lambda'' \frac{d}{dx}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + \mu'' \frac{d}{dy}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$$
$$+ \nu'' \frac{d}{dz}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - \frac{1}{R_2}(\lambda''\lambda + \mu''\mu + \nu''\nu) = 0.$$

2° De même en ayant égard successivement aux valeurs (25), aux mêmes équations (42) et à la formule (2),

$$\lambda' A_1 + \mu' B_1 + \nu' C_1 = \lambda'^2 \frac{\lambda}{x} + \mu'^2 \frac{\mu}{y} + \nu'^2 \frac{\nu}{z}$$
$$+ \mu'\nu'\left(\frac{\nu}{y} + \frac{\mu}{z}\right) + \nu'\lambda'\left(\frac{\lambda}{z} + \frac{\nu}{x}\right) + \lambda'\mu'\left(\frac{\mu}{x} + \frac{\lambda}{y}\right) - \frac{1}{R_1}(\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2)$$
$$= \frac{1}{\Delta_1\varphi}\left[\lambda'^2\left(\frac{\varphi^2}{x^2} - \lambda\frac{\Delta_1\varphi}{x}\right) + \mu'^2\left(\frac{\varphi^2}{y^2} - \mu\frac{\Delta_1\varphi}{y}\right) + \nu'^2\left(\frac{\varphi^2}{z^2} - \nu\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right)\right.$$

$$+\mu'\nu'\left(2\frac{\varphi^2}{yz}-\nu\frac{\Delta_1\varphi}{y}-\mu\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right)+\nu'\lambda'\left(2\frac{\varphi^2}{zx}-\lambda\frac{\Delta_1\varphi}{z}-\nu\frac{\Delta_1\varphi}{x}\right)$$

$$+\lambda'\mu'\left(2\frac{\varphi^2}{xy}-\mu\frac{\Delta_1\varphi}{x}-\lambda\frac{\Delta_1\varphi}{y}\right)\Bigg]-\frac{1}{R_1}$$

$$=\frac{1}{\Delta_1\varphi}\left(\lambda'^2\frac{\varphi}{x}+\mu'^2\frac{\varphi}{y}+\nu'^2\frac{\varphi}{z}+2\mu'\nu'\frac{\varphi^2}{yz}+2\nu'\lambda'\frac{\varphi^2}{zx}+2\lambda'\mu'\frac{\varphi^2}{xy}\right)$$

$$-\frac{1}{\Delta_1\varphi}(\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu')\left(\lambda'\frac{\Delta_1\varphi}{x}+\mu'\frac{\Delta_1\varphi}{y}+\nu'\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right)-\frac{1}{R_1}$$

$$=\frac{1}{\Delta_1\varphi}F(\lambda',\mu',\nu')-\frac{1}{R_1}.$$

Nous trouverions identiquement de même :

$$\lambda''A_2+\mu''B_2+\nu''C_2=\frac{1}{\Delta_1\varphi}F(\lambda'',\mu'',\nu'')-\frac{1}{R_2},$$

car, le premier membre de cette dernière équation se déduisant du premier membre des équations précédentes par le changement simultané de λ', μ', ν', en λ'', μ'', ν'' et de R_1 en R_2, il doit en être de même du second; et, par conséquent, nous aurons en vertu de nos hypothèses (45) :

$$\lambda'A_1+\mu'B_1+\nu'C_1=0, \quad \text{et} \quad \lambda''A_2+\mu''B_2+\nu''C_2=0.$$

3° Enfin, en ajoutant membre à membre les trois équations suivantes :

$$\lambda''A_1-\lambda'A_2=(\mu'\lambda''-\lambda'\mu'')\frac{\lambda}{y}+(\nu'\lambda''-\lambda'\nu'')\frac{\lambda}{z},$$

$$\mu''B_1-\mu'B_2=(\nu'\mu''-\mu'\nu'')\frac{\mu}{z}+(\lambda'\mu''-\mu'\lambda'')\frac{\mu}{x},$$

$$\nu''C_1-\nu'C_2=(\lambda'\nu''-\nu'\lambda'')\frac{\nu}{x}+(\mu'\nu''-\nu'\mu'')\frac{\nu}{y},$$

et nous reportant aux formules (44), nous obtiendrons immédiatement :

$$\lambda''A_1+\mu''B_1+\nu''C_1-(\lambda'A_2+\mu'B_2+\nu'C_2)$$

$$=\lambda\left(\frac{\nu}{y}-\frac{\mu}{z}\right)+\mu\left(\frac{\lambda}{z}-\frac{\nu}{x}\right)+\nu\left(\frac{\lambda}{y}-\frac{\mu}{x}\right)=0,$$

car le second membre de cette équation, égalé à zéro, n'est autre chose que la condition d'intégrabilité de l'équation différentielle totale, $\lambda dx + \mu dy + \nu dz = 0$, condition qui est manifestement remplie, puisque en vertu des valeurs (10) le premier membre est une différentielle exacte.

Nous avons donc ainsi obtenu très facilement entre les six quantités A, B, C relatives à la surface φ, les cinq relations linéaires et homogènes que nous allons récrire ici :

$$
(50)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1 = 0, & \lambda A_2 + \mu B_2 + \nu C_2 = 0, \\
\lambda' A_1 + \mu' B_1 + \nu' C_1 = 0, & \lambda'' A_2 + \mu'' B_2 + \nu'' C_2 = 0, \\
\multicolumn{2}{l}{\lambda'' A_1 + \mu'' B_1 + \nu'' C_1 - (\lambda' A_2 + \mu' B_2 + \nu' C_2) = 0.}
\end{array}
\right.
$$

Il est clair que chacune des trois surfaces, considérée isolément, nous fournira cinq équations analogues, qui se déduiront de la précédente par la permutation des trois surfaces, ou, ce qui est la même chose, des trois normales, c'est-à-dire par la permutation circulaire des trois systèmes (λ, μ, ν), (λ', μ', ν') et $(\lambda'', \mu'', \nu'')$.

Ayant donc le système (50) pour la surface φ, dont la normale est (λ, μ, ν), nous aurons pour la surface ψ, dont la normale est (λ', μ', ν') :

$$
(51)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\lambda' A'_1 + \mu' B'_1 + \nu' C'_1 = 0, & \lambda' A'_2 + \mu' B'_2 + \nu' C'_2 = 0, \\
\lambda'' A'_1 + \mu'' B'_1 + \nu'' C'_1 = 0, & \lambda A'_2 + \mu B'_2 + \nu C'_2 = 0, \\
\multicolumn{2}{l}{\lambda A'_1 + \mu B'_1 + \nu C'_1 - (\lambda'' A'_2 + \mu'' B'_2 + \nu'' C'_2) = 0;}
\end{array}
\right.
$$

puis pour la surface ϖ, dont la normale est $(\lambda'', \mu'', \nu'')$, cet autre système :

$$
(52)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\lambda'' A''_1 + \mu'' B''_1 + \nu'' C''_1 = 0, & \lambda'' A''_2 + \mu'' B''_2 + \nu'' C''_2 = 0, \\
\lambda A''_1 + \mu B''_1 + \nu C''_1 = 0, & \lambda' A''_2 + \mu' B''_2 + \nu' C''_2 = 0, \\
\multicolumn{2}{l}{\lambda' A''_1 + \mu' B''_1 + \nu' C''_1 - (\lambda A''_2 + \mu B''_2 + \nu C''_2) = 0,}
\end{array}
\right.
$$

et les trois systèmes (50), (51) et (52) nous fournissant déjà quinze équations entre les dix-huit quantités A, B, C, il nous en reste encore trois autres à trouver seulement.

Nous obtiendrons ces trois dernières relations avec la même facilité que les précédentes en formant la combinaison :

$$
\begin{aligned}
&\lambda' A_1'' + \mu' B_1'' + \nu' C_1'' + \lambda'' A_2' + \mu'' B_2' + \nu'' C_2' \\
&= \lambda \frac{d}{dx}(\lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'') \\
&+ \mu \frac{d}{dy}(\lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'') \\
&+ \nu \frac{d}{dz}(\lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'') \\
&- \frac{1}{R_1''}(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu') - \frac{1}{R_2'}(\lambda''\lambda + \mu''\mu + \nu''\nu) = 0,
\end{aligned}
$$

toujours en vertu des mêmes formules (42). En permutant encore une fois les trois normales, ce qui revient à permuter les trois systèmes (λ, μ, ν), (λ', μ', ν') et $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ circulairement entre eux, nous obtiendrons ainsi le dernier système de trois relations :

$$
(53) \quad . \quad \left\{
\begin{aligned}
&\lambda' A_1'' + \mu' B_1'' + \nu' C_1'' + \lambda'' A_2' + \mu'' B_2' + \nu'' C_2' = 0, \\
&\lambda'' A_1 + \mu'' B_1 + \nu'' C_1 + \lambda A_2'' + \mu B_2'' + \nu C_2'' = 0, \\
&\lambda A_1' + \mu B_1' + \nu C_1' + \lambda' A_2 + \mu' B_2 + \nu' C_2 = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

lequel, joint aux trois systèmes (50), (51) et (52), forme un total de dix-huit équations suffisantes pour déterminer les dix-huit inconnues A, B, C.

Cette détermination est d'ailleurs assez facile, malgré ce que le simple énoncé du problème peut présenter d'effrayant *à priori*, à cause de la forme très particulière de ce système, qui permet de réduire très aisément, par des éliminations successives, le nombre des inconnues d'abord à neuf, puis à six, et enfin à trois seulement, et par conséquent d'en obtenir sans peine la valeur.

En effet, si nous récrivons ici les trois dernières équations de chacun des systèmes (50), (51) et (52), nous formerons le système :

$$
(54) \quad . \quad \left\{
\begin{aligned}
&\lambda'' A_1 + \mu'' B_1 + \nu'' C_1 - (\lambda' A_2 + \mu' B_2 + \nu' C_2) = 0, \\
&\lambda A_1' + \mu B_1' + \nu C_1' - (\lambda'' A_2' + \mu'' B_2' + \nu'' C_2') = 0, \\
&\lambda' A_1'' + \mu' B_1'' + \nu' C_1'' - (\lambda A_2'' + \mu B_2'' + \nu C_2'') = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

qui, rapproché du système précédent (53), permet d'isoler très simplement soit les inconnues affectées de l'indice 1, soit celles affectées de l'indice 2 : car, en ajoutant la première de (54) à la troisième de (53), nous obtenons la première des trois suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}
\lambda''A_1 + \mu''B_1 + \nu''C_1 + \lambda A'_1 + \mu B'_1 + \nu C'_1 = 0, \\
\lambda A'_1 + \mu B'_1 + \nu C'_1 + \lambda' A''_1 + \mu' B''_1 + \nu' C''_1 = 0, \\
\lambda' A''_1 + \mu' B''_1 + \nu' C''_1 + \lambda'' A_1 + \mu'' B_1 + \nu'' C_1 = 0,
\end{array}\right.$$

les deux autres s'en déduisant immédiatement par permutation circulaire des trois normales, puisque les trois équations de chacun des systèmes (53) et (54) se déduisent elles-mêmes les unes des autres suivant cette loi ; et de même, en retranchant la première de (54) de la deuxième de (53), et opérant ensuite par permutation circulaire, nous obtiendrons cet autre système :

$$\left\{\begin{array}{l}
\lambda' A_2 + \mu' B_2 + \nu' C_2 + \lambda A''_2 + \mu B''_2 + \nu C''_2 = 0, \\
\lambda'' A'_2 + \mu'' B'_2 + \nu'' C'_2 + \lambda' A_2 + \mu' B_2 + \nu' C_2 = 0, \\
\lambda A''_2 + \mu B''_2 + \nu C''_2 + \lambda'' A'_2 + \mu'' B'_2 + \nu'' C'_2 = 0,
\end{array}\right.$$

chacun de ces deux derniers systèmes ne renfermant plus qu'un seul indice, c'est-à-dire neuf inconnues seulement au lieu de dix-huit.

Maintenant, pour isoler les inconnues relatives à une même surface, il suffira, dans chacun des deux systèmes qui précèdent, de retrancher successivement chaque équation de la somme des deux autres, ce qui donnera les six équations équivalentes :

$$\left\{\begin{array}{lll}
2(\lambda''A_1+\mu''B_1+\nu''C_1)=0, & 2(\lambda A'_1+\mu B'_1+\nu C'_1)=0, & 2(\lambda' A''_1+\mu' B''_1+\nu' C''_1)=0, \\
2(\lambda' A_2+\mu' B_2+\nu' C_2)=0, & 2(\lambda'' A'_2+\mu'' B'_2+\nu'' C'_2)=0, & 2(\lambda A''_2+\mu B''_2+\nu C''_2)=0,
\end{array}\right.$$

lesquelles, étant rapprochées des quatre premières des systèmes (50), (51) et (52), permettent de remplacer le système primitif entre les dix-huit inconnues par la collection des six systèmes suivants entre trois inconnues seulement :

$$\left\{\begin{array}{lll}\lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1 = 0, & \lambda A_1' + \mu B_1' + \nu C_1' = 0, & \lambda A_1'' + \mu B_1'' + \nu C_1'' = 0,\\ \lambda' A_1 + \mu' B_1 + \nu' C_1 = 0, & \lambda' A_1' + \mu' B_1' + \nu' C_1' = 0, & \lambda' A_1'' + \mu' B_1'' + \nu' C_1'' = 0,\\ \lambda'' A_1 + \mu'' B_1 + \nu'' C_1 = 0, & \lambda'' A_1' + \mu'' B_1' + \nu'' C_1' = 0, & \lambda'' A_1'' + \mu'' B_1'' + \nu'' C_1'' = 0,\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll}\lambda A_2 + \mu B_2 + \nu C_2 = 0, & \lambda A_2' + \mu B_2' + \nu C_2' = 0, & \lambda A_2'' + \mu B_2'' + \nu C_2'' = 0,\\ \lambda' A_2 + \mu' B_2 + \nu' C_2 = 0, & \lambda' A_2' + \mu' B_2' + \nu' C_2' = 0, & \lambda' A_2'' + \mu' B_2'' + \nu' C_2'' = 0,\\ \lambda'' A_2 + \mu'' B_2 + \nu'' C_2 = 0, & \lambda'' A_2' + \mu'' B_2' + \nu'' C_2' = 0, & \lambda'' A_2'' + \mu'' B_2'' + \nu'' C_2'' = 0.\end{array}\right.$$

Les dix-huit inconnues se trouvent donc ainsi partagées en six groupes de trois inconnues A, B, C relatives à une même direction et à une même surface, chacun de ces groupes étant caractérisé par l'indice et l'accent, et ces six groupes satisfont tous à un système d'équations de la même forme et du même type, qui est le suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda A + \mu B + \nu C = 0,\\ \lambda' A + \mu' B + \nu' C = 0,\\ \lambda'' A + \mu'' B + \nu'' C = 0.\end{array}\right.$$

Or, à la place de ce système, nous pouvons évidemment considérer le système équivalent formé en ajoutant successivement les trois équations multipliées respectivement d'abord par $\lambda, \lambda', \lambda''$, puis par μ, μ', μ'', et enfin par ν, ν', ν'', c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{l}(\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2) A + (\lambda\mu + \lambda'\mu' + \lambda''\mu'') B + (\lambda\nu + \lambda'\nu' + \lambda''\nu'') C = 0,\\ (\lambda\mu + \lambda'\mu' + \lambda''\mu'') A + (\mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2) B + (\mu\nu + \mu'\nu' + \mu''\nu'') C = 0,\\ (\lambda\nu + \lambda'\nu' + \lambda''\nu'') A + (\mu\nu + \mu'\nu' + \mu''\nu'') B + (\nu^2 + \nu'^2 + \nu''^2) C = 0;\end{array}\right.$$

lequel système se réduit simplement en vertu des formules (42) à

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0;$$

ce qui montre que les dix-huit quantités A, B, C sont bien toutes nulles, ainsi que nous nous proposions de l'établir.

Outre la propriété géométrique importante qui était le but principal de nos calculs, la démonstration qui précède fournit encore ce résultat intéressant qui en est comme la traduction analytique, et qui nous sera fort utile tout à l'heure, à savoir qu'il existe dix-huit équations différentielles simultanées, aux dérivées partielles du premier ordre, entre les neuf cosinus directeurs des trois normales, et les six rayons de courbure principaux du système, équations que l'on obtiendra (sans qu'il soit nécessaire de les récrire ici), en substituant partout zéro aux quantités A, B, C, dans les premiers membres des dix-huit équations du tableau (49^{bis}). Mais ces dix-huit équations ne sont pas les seules du même genre qui existent entre les mêmes quantités, et il nous reste à en faire connaître neuf autres, très remarquables par leur forme, qui nous seront utiles également pour parvenir à d'autres propriétés géométriques intéressantes.

Pour cela, nous poserons par analogie avec nos notations de la démonstration précédente :

$$
(55)\ \ldots\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
A_3 = \lambda\dfrac{\lambda}{x} + \mu\dfrac{\lambda}{y} + \nu\dfrac{\lambda}{z} + \dfrac{\lambda''}{R''_1} + \dfrac{\lambda'}{R'_2}, \\[2ex]
B_3 = \lambda\dfrac{\mu}{x} + \mu\dfrac{\mu}{y} + \nu\dfrac{\mu}{z} + \dfrac{\mu''}{R''_1} + \dfrac{\mu'}{R'_2}, \\[2ex]
C_3 = \lambda\dfrac{\nu}{x} + \mu\dfrac{\nu}{y} + \nu\dfrac{\nu}{z} + \dfrac{\nu''}{R''_1} + \dfrac{\nu'}{R'_2},
\end{array}\right. \\[6ex]
\left\{\begin{array}{l}
A'_3 = \lambda'\dfrac{\lambda'}{x} + \mu'\dfrac{\lambda'}{y} + \nu'\dfrac{\lambda'}{z} + \dfrac{\lambda}{R_1} + \dfrac{\lambda''}{R''_2}, \\[2ex]
B'_3 = \lambda'\dfrac{\mu'}{x} + \mu'\dfrac{\mu'}{y} + \nu'\dfrac{\mu'}{z} + \dfrac{\mu}{R_1} + \dfrac{\mu''}{R''_2}, \\[2ex]
C'_3 = \lambda'\dfrac{\nu'}{x} + \mu'\dfrac{\nu'}{y} + \nu'\dfrac{\nu'}{z} + \dfrac{\nu}{R_1} + \dfrac{\nu''}{R''_2},
\end{array}\right. \\[6ex]
\left\{\begin{array}{l}
A''_3 = \lambda''\dfrac{\lambda''}{x} + \mu''\dfrac{\lambda''}{y} + \nu''\dfrac{\lambda''}{z} + \dfrac{\lambda'}{R'_1} + \dfrac{\lambda}{R_2}, \\[2ex]
B''_3 = \lambda''\dfrac{\mu''}{x} + \mu''\dfrac{\mu''}{y} + \nu''\dfrac{\mu''}{z} + \dfrac{\mu'}{R'_1} + \dfrac{\mu}{R_2}, \\[2ex]
C''_3 = \lambda''\dfrac{\nu''}{x} + \mu''\dfrac{\nu''}{y} + \nu''\dfrac{\nu''}{z} + \dfrac{\nu'}{R'_1} + \dfrac{\nu}{R_2},
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

les quantités dénotées par les mêmes lettres se déduisant encore les unes des autres par la permutation circulaire des trois surfaces; puis nous formerons, comme tout à l'heure, la combinaison :

$$\lambda A_3 + \mu B_3 + \nu C_3 = \lambda \frac{d}{dx}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + \mu \frac{d}{dy}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$$
$$+ \nu \frac{d}{dz}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + \frac{1}{R''_1}(\lambda\lambda'' + \mu\mu'' + \nu\nu'') + \frac{1}{R'_2}(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu'),$$

et par conséquent, en vertu des équations (42), nous aurons la première des trois équations :

$$\lambda A_3 + \mu B_3 + \nu C_3 = 0, \quad \lambda' A'_3 + \mu' B'_3 + \nu' C'_3 = 0, \quad \lambda'' A''_3 + \mu'' B''_3 + \nu'' C''_3 = 0;$$

les deux autres se déduisant de la première par la permutation des trois surfaces.

Puis, nous reportant au tableau (49^{bis}) de la démonstration qui précède, nous formerons de même les deux combinaisons :

$$\lambda' A_3 + \mu' B_3 + \nu' C_3 + \lambda A'_2 + \mu B'_2 + \nu C'_2 = \lambda \frac{d}{dx}(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')$$
$$+ \mu \frac{d}{dy}(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu') + \nu \frac{d}{dz}(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')$$
$$+ \frac{1}{R''_1}(\lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'') + \frac{1}{R'_2}\left[\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\right],$$

$$\lambda'' A_3 + \mu'' B_3 + \nu'' C''_3 + \lambda A''_1 + \mu B''_1 + \nu C''_1 = \lambda \frac{d}{dx}(\lambda\lambda'' + \mu\mu'' + \nu\nu'')$$
$$+ \mu \frac{d}{dy}(\lambda\lambda'' + \mu\mu'' + \nu\nu'') + \nu \frac{d}{dz}(\lambda\lambda'' + \mu\mu'' + \nu\nu'')$$
$$+ \frac{1}{R''_2}(\lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'') + \frac{1}{R''_1}\left[\lambda''^2 + \mu''^2 + \nu''^2 - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\right],$$

c'est-à-dire, toujours en vertu des mêmes formules (42), et en se rappelant que d'après la démonstration précédente les quantités

A'_2, B'_2, C'_2 A''_1, B''_1, C''_1, sont toutes nulles, la première de chacune des deux groupes :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda' A_3 + \mu' B_3 + \nu' C_3 = 0, \\ \lambda'' A'_3 + \mu'' B'_3 + \nu'' C'_3 = 0, \\ \lambda A''_3 + \mu B''_3 + \nu C''_3 = 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda'' A_3 + \mu'' B_3 + \nu'' C_3 = 0, \\ \lambda A'_3 + \mu B'_3 + \nu C'_3 = 0, \\ \lambda' A''_3 + \mu' B''_3 + \nu' C''_3 = 0; \end{array}\right.$$

lesquels, étant rapprochés du précédent, donnent pour déterminer les nouvelles inconnues A, B, C, les trois systèmes :

$$\left\{\begin{array}{lll} \lambda A_3 + \mu B_3 + \nu C''_3 = 0, & \lambda A'_3 + \mu B'_3 + \nu C'_3 = 0, & \lambda A''_3 + \mu B''_3 + \nu C''_3 = 0, \\ \lambda' A_3 + \mu' B_3 + \nu' C''_3 = 0, & \lambda' A'_3 + \mu' B'_3 + \nu' C'_3 = 0, & \lambda' A''_3 + \mu' B''_3 + \nu' C''_3 = 0, \\ \lambda'' A_3 + \mu'' B_3 + \nu'' C_3 = 0, & \lambda'' A'_3 + \mu'' B'_3 + \nu'' C'_3 = 0, & \lambda'' A''_3 + \mu'' B''_3 + \nu'' C''_3 = 0, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire, en vertu de la démonstration déjà fournie, que les neuf quantités A, B, C définies au tableau (55) sont aussi toutes nulles; et par conséquent nous devons joindre aux dix-huit équations provenant du tableau (49^{bis}), ainsi que nous l'avons expliqué, les neuf obtenues en écrivant également 0 à la place des lettres A, B, C dans les premiers membres des équations du tableau (55).

Ces neuf dernières sont intéressantes en ce qu'elles se partagent en trois groupes, ne contenant chacun que les cosinus relatifs à une seule surface et les rayons principaux correspondant à des sections normales dirigées précisément suivant la normale à cette même surface, et qu'elles présentent par rapport à ces cosinus considérés comme inconnues le type bien connu, mais assez rare, des équations de l'hydrodynamique.

Ces équations nous serviront en premier lieu à transformer l'expression des six rayons de courbure principaux, qui résulte immédiatement du théorème que nous venons d'établir, en une autre qui nous amènera tout naturellement à l'introduction des coordonnées curvilignes, et de là nous arriverons sans peine, comme on le verra, par le moyen des équations (49^{bis}) et (55), aux formules remarquables que Lamé a données pour cette théorie, à l'aide de ce nouvel instrument analytique.

Pour cela ayant en particulier pour la première surface, entre les trois cosinus λ, μ, ν, de sa normale et les deux rayons principaux R''_1 et R'_2 des sections des autres surfaces dirigées suivant cette normale, les trois équations :

$$A_3 = 0, \quad B_3 = 0, \quad C_3 = 0,$$

c'est-à-dire les trois suivantes :

$$(55^{bis}) \ldots \begin{cases} \lambda \dfrac{\lambda}{x} + \mu \dfrac{\lambda}{y} + \nu \dfrac{\lambda}{z} + \dfrac{\lambda''}{R''_1} + \dfrac{\lambda'}{R'_2} = 0, \\ \lambda \dfrac{\mu}{x} + \mu \dfrac{\mu}{y} + \nu \dfrac{\mu}{z} + \dfrac{\mu''}{R''_1} + \dfrac{\mu'}{R'_2} = 0, \\ \lambda \dfrac{\nu}{x} + \mu \dfrac{\nu}{y} + \nu \dfrac{\nu}{z} + \dfrac{\nu''}{R''_1} + \dfrac{\nu'}{R'_2} = 0, \end{cases}$$

nous y remplacerons les dérivées des trois cosinus λ, μ, ν par les valeurs du tableau (25), ce qui transformera ces équations dans les suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta_1\varphi}\left[\lambda \dfrac{\varphi^2}{x^2} + \mu \dfrac{\varphi^2}{xy} + \nu \dfrac{\varphi^2}{xz} - \lambda\left(\lambda \dfrac{\Delta_1\varphi}{x} + \mu \dfrac{\Delta_1\varphi}{y} + \nu \dfrac{\Delta_1\varphi}{z}\right)\right] + \dfrac{\lambda''}{R''_1} + \dfrac{\lambda'}{R'_2} = 0, \\ \dfrac{1}{\Delta_1\varphi}\left[\lambda \dfrac{\varphi^2}{yx} + \mu \dfrac{\varphi^2}{y^2} + \nu \dfrac{\varphi^2}{yz} - \mu\left(\lambda \dfrac{\Delta_1\varphi}{x} + \mu \dfrac{\Delta_1\varphi}{y} + \nu \dfrac{\Delta_1\varphi}{z}\right)\right] + \dfrac{\mu''}{R''_1} + \dfrac{\mu'}{R'_2} = 0, \\ \dfrac{1}{\Delta_1\varphi}\left[\lambda \dfrac{\varphi^2}{zx} + \mu \dfrac{\varphi^2}{zy} + \nu \dfrac{\varphi^2}{z^2} - \nu\left(\lambda \dfrac{\Delta_1\varphi}{x} + \mu \dfrac{\Delta_1\varphi}{y} + \nu \dfrac{\Delta_1\varphi}{z}\right)\right] + \dfrac{\nu''}{R''_1} + \dfrac{\nu'}{R'_2} = 0; \end{cases}$$

puis, nous reportant aux équations (29^{bis}) et (27), et multipliant par $\Delta_1\varphi$, nous les mettrons sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta_1\varphi}{x} - \dfrac{\lambda}{\Delta_1^2\varphi} F\left(\dfrac{\varphi}{x}, \dfrac{\varphi}{y}, \dfrac{\varphi}{z}\right) + \Delta_1\varphi\left(\dfrac{\lambda''}{R''_1} + \dfrac{\lambda'}{R'_2}\right) = 0, \\ \dfrac{\Delta_1\varphi}{y} - \dfrac{\mu}{\Delta_1^2\varphi} F\left(\dfrac{\varphi}{x}, \dfrac{\varphi}{y}, \dfrac{\varphi}{z}\right) + \Delta_1\varphi\left(\dfrac{\mu''}{R''_1} + \dfrac{\mu'}{R'_2}\right) = 0, \\ \dfrac{\Delta_1\varphi}{z} - \dfrac{\nu}{\Delta_1^2\varphi} F\left(\dfrac{\varphi}{x}, \dfrac{\varphi}{y}, \dfrac{\varphi}{z}\right) + \Delta_1\varphi\left(\dfrac{\nu''}{R''_1} + \dfrac{\nu'}{R'_2}\right) = 0. \end{cases}$$

Cela posé, nous obtiendrons immédiatement une nouvelle expression des rayons de courbure principaux R''_1 et R'_2 en ajoutant à deux reprises différentes ces trois équations multipliées successivement par λ', μ', ν' et λ'', μ'', ν'', ce qui donnera les deux suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
&\lambda'\frac{\Delta_1\varphi}{x}+\mu'\frac{\Delta_1\varphi}{y}+\nu'\frac{\Delta_1\varphi}{z}-\frac{1}{\Delta_1^2\varphi}(\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu')\,F\left(\frac{\varphi}{x},\frac{\varphi}{y},\frac{\varphi}{z}\right)\\
&\qquad+\Delta_1\varphi\left[\frac{1}{R''_1}(\lambda'\lambda''+\mu'\mu''+\nu'\nu'')+\frac{1}{R'_2}(\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2)\right]=0,\\
&\lambda''\frac{\Delta_1\varphi}{x}+\mu''\frac{\Delta_1\varphi}{y}+\nu''\frac{\Delta_1\varphi}{z}-\frac{1}{\Delta_1^2\varphi}(\lambda\lambda''+\mu\mu''+\nu\nu'')\,F\left(\frac{\varphi}{x},\frac{\varphi}{y},\frac{\varphi}{z}\right)\\
&\qquad+\Delta_1\varphi\left[\frac{1}{R''_1}(\lambda''^2+\mu''^2+\nu''^2)+\frac{1}{R'_2}(\lambda'\lambda''+\mu'\mu''+\nu'\nu'')\right]=0,
\end{aligned}\right.$$

lesquelles se réduisent en vertu des équations (42) à la première de chacun des deux groupes ci-dessous :

$$(56)\quad\left\{\begin{aligned}
-\frac{\Delta_1\varphi}{R''_1}&=\lambda''\frac{\Delta_1\varphi}{x}+\mu''\frac{\Delta_1\varphi}{y}+\nu''\frac{\Delta_1\varphi}{z}\\
-\frac{\Delta_1\psi}{R_1}&=\lambda\frac{\Delta_1\psi}{x}+\mu\frac{\Delta_1\psi}{y}+\nu\frac{\Delta_1\psi}{z}\\
-\frac{\Delta_1\varpi}{R'_1}&=\lambda'\frac{\Delta_1\varpi}{x}+\mu'\frac{\Delta_1\varpi}{y}+\nu'\frac{\Delta_1\varpi}{z}
\end{aligned}\right.\qquad
\left\{\begin{aligned}
-\frac{\Delta_1\varphi}{R'_2}&=\lambda'\frac{\Delta_1\varphi}{x}+\mu'\frac{\Delta_1\varphi}{y}+\nu'\frac{\Delta_1\varphi}{z}\\
-\frac{\Delta_1\psi}{R''_2}&=\lambda''\frac{\Delta_1\psi}{x}+\mu''\frac{\Delta_1\psi}{y}+\nu''\frac{\Delta_1\psi}{z}\\
-\frac{\Delta_1\varpi}{R_2}&=\lambda\frac{\Delta_1\varpi}{x}+\mu\frac{\Delta_1\varpi}{y}+\nu\frac{\Delta_1\varpi}{z},
\end{aligned}\right.$$

les deux autres se déduisant de la première dans chaque groupe par permutation des trois surfaces, puisque toutes les équations dont nous nous sommes servi font partie d'un cycle formé d'après cette loi.

Nous aurions pu obtenir encore ces mêmes expressions, et peut-être plus rapidement, en partant des dérivées premières des équations (48) qui expriment les conditions d'orthogonalité des trois surfaces; car si, par exemple, nous ajoutons successivement les trois équations (48^{bis}), obtenues en différentiant la première des équations (48), après les avoir multipliées par $\frac{\psi}{x}, \frac{\psi}{y}, \frac{\psi}{z}$, on voit immédiatement que nous obtiendrons :

$$\frac{\varpi}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\psi}{x}+\frac{\varpi}{y}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\psi}{y}+\frac{\varpi}{z}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\psi}{z}$$
$$+\left(\frac{\psi}{x}\right)^2\frac{\varpi^2}{x^2}+\left(\frac{\psi}{y}\right)^2\frac{\varpi^2}{y^2}+\left(\frac{\psi}{z}\right)^2\frac{\varpi^2}{z^2}+2\frac{\psi}{y}\frac{\psi}{z}\frac{\varpi^2}{yz}+2\frac{\psi}{z}\frac{\psi}{x}\frac{\varpi^2}{zx}+2\frac{\psi}{x}\frac{\psi}{y}\frac{\varpi^2}{xy}=0,$$

ou, ce qui est la même chose, en divisant par $\Delta_1\varpi\Delta_1^2\psi$:

$$\frac{1}{\Delta_1\psi}\left(\lambda''\frac{\Delta_1\psi}{x}+\mu''\frac{\Delta_1\psi}{y}+\nu''\frac{\Delta_1\psi}{z}\right)$$
$$+\frac{1}{\Delta_1\varpi}\left(\lambda'^2\frac{\varpi^2}{x^2}+\mu'^2\frac{\varpi^2}{y^2}+\nu'^2\frac{\varpi^2}{z^2}+2\mu'\nu'\frac{\varpi^2}{yz}+2\nu'\lambda'\frac{\varpi^2}{zx}+2\lambda'\mu'\frac{\varpi^2}{xy}\right)=0.$$

Or, d'après les formules (5) et (2) supposées appliquées à la surface ϖ, le coefficient de $\frac{1}{\Delta_1\varpi}$ n'est autre que $\frac{\Delta_1\varpi}{R''_2}$, puisque R''_2 est par définition le rayon de courbure de la section normale de la surface ϖ, correspondant à la direction (λ', μ', ν'). Nous aurons donc ainsi en définitive :

$$\frac{1}{\Delta_1\psi}\left(\lambda''\frac{\Delta_1\psi}{x}+\mu''\frac{\Delta_1\psi}{y}+\nu''\frac{\Delta_1\psi}{z}\right)+\frac{1}{R''_2}=0,$$

ce qui n'est autre chose que la seconde de droite des formules (56). Les mêmes équations (48^{bis}), multipliées, au contraire, par $\frac{\varpi}{x}, \frac{\varpi}{y}, \frac{\varpi}{z}$ et traitées de la même façon, nous eussent donné semblablement :

$$\left(\frac{\varpi}{x}\right)^2\frac{\psi^2}{x^2}+\left(\frac{\varpi}{y}\right)^2\frac{\psi^2}{y^2}+\left(\frac{\varpi}{z}\right)^2\frac{\psi^2}{z^2}+2\frac{\varpi}{y}\frac{\varpi}{z}\frac{\psi^2}{yz}+2\frac{\varpi}{z}\frac{\varpi}{x}\frac{\psi^2}{zx}+2\frac{\varpi}{x}\frac{\varpi}{y}\frac{\psi^2}{xy}$$
$$+\frac{\psi}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varpi}{x}+\frac{\psi}{y}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varpi}{y}+\frac{\psi}{z}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varpi}{z}=0,$$

ou en divisant par $\Delta_1\psi\Delta_1^2\varpi$, et se reportant aux définitions de la démonstration précédente,

$$\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{\Delta_1\varpi}\left(\lambda'\frac{\Delta_1\varpi}{x} + \mu'\frac{\Delta_1\varpi}{y} + \nu'\frac{\Delta_1\varpi}{z}\right) = 0,$$

c'est-à-dire précisément la troisième des équations (56), et les quatre autres s'obtiendront évidemment encore par la permutation des trois surfaces.

Si donc nous n'avions eu en vue que d'arriver aux expressions (56), nous aurions pu nous dispenser d'établir préalablement les formules (55^{bis}), mais sans parler de leur forme très remarquable qui nous a paru intéressante à signaler, ces équations nous serviront encore par la suite, comme on le verra, pour arriver aux autres propositions qui nous restent à démontrer.

Ces résultats obtenus, supposons maintenant que nous prenions pour variables indépendantes, au lieu des valeurs de x, y, z, les valeurs correspondantes des fonctions φ, ψ, et ϖ elles-mêmes (que l'on nomme alors *coordonnées curvilignes*), le théorème des fonctions de fonctions nous donnera, en continuant d'employer par rapport à ces nouvelles variables la même notation différentielle que par rapport aux anciennes, pour une quantité quelconque ω ayant une valeur déterminée en chaque point de l'espace (ce que Lamé appelle une *fonction de point*), et que l'on pourra, par conséquent, considérer indifféremment comme fonction soit des coordonnées rectilignes x, y, z, soit des coordonnées curvilignes φ, ψ, ϖ :

$$(57) \quad \ldots\ldots \quad \left\{\begin{aligned} \frac{\omega}{x} &= \frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{x} + \frac{\omega}{\psi}\frac{\psi}{x} + \frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{x} \\ \frac{\omega}{y} &= \frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{y} + \frac{\omega}{\psi}\frac{\psi}{y} + \frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{x} \\ \frac{\omega}{z} &= \frac{\omega}{\varphi}\frac{\varphi}{z} + \frac{\omega}{\psi}\frac{\psi}{z} + \frac{\omega}{\varpi}\frac{\varpi}{z}, \end{aligned}\right.$$

lesquelles équations, étant ajoutées successivement multipliées par $\frac{\varphi}{x}, \frac{\varphi}{y}, \frac{\varphi}{z}$, puis par $\frac{\psi}{x}, \frac{\psi}{y}, \frac{\psi}{z}$, et, enfin, par $\frac{\varpi}{x}, \frac{\varpi}{y}, \frac{\varpi}{z}$, nous donneront à cause des équations (48) :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\varphi}{x}\frac{\omega}{x} + \frac{\varphi}{y}\frac{\omega}{y} + \frac{\varphi}{z}\frac{\omega}{z} = \frac{\omega}{\varphi}\,\Delta_1^2\varphi \\
&\frac{\psi}{x}\frac{\omega}{x} + \frac{\psi}{y}\frac{\omega}{y} + \frac{\psi}{z}\frac{\omega}{z} = \frac{\omega}{\psi}\,\Delta_1^2\psi \\
&\frac{\varpi}{x}\frac{\omega}{x} + \frac{\varpi}{y}\frac{\omega}{y} + \frac{\varpi}{z}\frac{\omega}{z} = \frac{\omega}{\varpi}\,\Delta_1^2\varpi,
\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui est la même chose, en divisant respectivement ces trois dernières équations par $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$:

$$(58)\ldots\ldots \left\{\begin{aligned}
&\lambda\,\frac{\omega}{x} + \mu\,\frac{\omega}{y} + \nu\,\frac{\omega}{z} = \frac{\omega}{\varphi}\,\Delta_1\varphi, \\
&\lambda'\,\frac{\omega}{x} + \mu'\,\frac{\omega}{y} + \nu'\,\frac{\omega}{z} = \frac{\omega}{\psi}\,\Delta_1\psi, \\
&\lambda''\frac{\omega}{x} + \mu''\frac{\omega}{y} + \nu''\frac{\omega}{z} = \frac{\omega}{\varpi}\,\Delta_1\varpi.
\end{aligned}\right.$$

Cela posé, il suffit de se reporter aux expressions nouvellement obtenues pour les six courbures principales du système, c'est-à-dire aux formules (56), pour voir qu'elles peuvent se mettre sous la forme très simple :

$$\left\{\begin{aligned}
&-\frac{\Delta_1\psi}{R_1} = \frac{\Delta_1\psi}{\varphi}\cdot\Delta_1\varphi, \qquad -\frac{\Delta_1\varpi}{R_1'} = \frac{\Delta_1\varpi}{\psi}\cdot\Delta_1\psi, \qquad -\frac{\Delta_1\varphi}{R_1''} = \frac{\Delta_1\varphi}{\varpi}\cdot\Delta_1\varpi, \\
&-\frac{\Delta_1\varpi}{R_2} = \frac{\Delta_1\varpi}{\varphi}\cdot\Delta_1\varphi, \qquad -\frac{\Delta_1\varphi}{R_2'} = \frac{\Delta_1\varphi}{\psi}\cdot\Delta_1\psi, \qquad -\frac{\Delta_1\psi}{R_2''} = \frac{\Delta_1\psi}{\varpi}\cdot\Delta_1\varpi,
\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui est la même chose :

$$(59)\ \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{R_1} = -\Delta_1\varphi\,\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}, \qquad \frac{1}{R_1'} = -\Delta_1\psi\,\frac{l\Delta_1\varpi}{\psi}, \qquad \frac{1}{R_1''} = -\Delta_1\varpi\,\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}, \\
&\frac{1}{R_2} = -\Delta_1\varphi\,\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}, \qquad \frac{1}{R_2'} = -\Delta_1\psi\,\frac{l\Delta_1\varphi}{\psi}, \qquad \frac{1}{R_2''} = -\Delta_1\varpi\,\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}.
\end{aligned}\right.$$

Telle est l'expression remarquable(*) donnée par Lamé des six courbures principales, au moyen des coordonnées curvilignes : on voit qu'il n'y figure que les trois paramètres différentiels du premier ordre et leurs premières dérivées par rapport à ces coordonnées.

La forme si simple de ces expressions permet d'apercevoir la possibilité d'obtenir presque immédiatement trois relations diffé-

---

(*) Les expressions données par Lamé (voir *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § XXX, page 51) diffèrent à la vérité par le signe de celles que nous venons d'écrire, mais cette divergence tient uniquement à la définition admise par lui pour le signe du rayon de courbure, définition qui est précisément l'inverse, comme on va le voir, de celle que nous avons posée nous-même.

En effet pour définir ce signe, Lamé distingue comme nous l'avons fait sur chaque normale un sens positif et un sens négatif, et regarde le rayon de courbure comme *positif* lorsqu'il est dirigé suivant le sens *positif* de la normale, et inversement. Si donc nous faisons voir que la définition qu'il donne du sens positif ou négatif de la normale concorde exactement avec celle que nous avons donnée nous-même dans le paragraphe I^er^, il s'ensuivra bien qu'il y a opposition complète entre les deux définitions correspondantes pour le signe du rayon de courbure, et la divergence des signes des deux systèmes de formules se trouvera ainsi justifiée.

Or, pour s'en assurer, il suffit de se reporter à la formule (40^{bis}) du paragraphe précédent et aux raisonnements qui nous ont servi à l'établir en partant de nos définitions du paragraphe I^er^. On verra de suite ainsi que δn étant par définition la projection sur la normale *positive* de la distance des points infiniment voisins x, y, z et $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, et d'autre part étant forcément par l'équation (40^{bis}) de même signe que δC (puisque $\Delta_1\varphi$ est par définition essentiellement positif), cette projection sera positive du côté de la surface où le paramètre augmente, et négative du côté où il diminue, ce qui signifie (la distance de deux points étant une grandeur absolue) que la normale positive est dirigée du côté où le paramètre de la surface va en augmentant. Or, c'est là précisément la définition posée par Lamé pour le sens positif de la normale. (*Loc. cit.*, § XXVIII, pp. 46-48).

Notons en passant que cette concordance pourra fournir souvent un moyen simple et commode de reconnaître quel est le sens positif et quel est le sens négatif de la normale lorsque l'on serait embarrassé pour faire cette distinction en partant de notre définition. Il suffira en effet de considérer alors la surface $\varphi(x, y, z) = 0$, comme une surface individuelle de la famille $\varphi(x, y, z) = C$ (celle où le paramètre C est nul), et de lui appliquer la règle fournie par la définition de Lamé.

Disons enfin que, malgré cette opposition de notre définition du signe du rayon de courbure avec celle admise par Lamé, nous n'en croyons pas moins devoir maintenir celle que nous avons posée dans le paragraphe I^er^. On la trouvera en effet comme nous plus logique et plus naturelle (nonobstant l'antinomie apparente des termes qui y figurent) si l'on réfléchit que pour les cas les plus simples et les plus usuels, tels que la sphère, l'ellipsoïde, etc., elle donne pour le rayon de courbure des sections normales une valeur positive (la normale positive étant alors la normale extérieure), tandis que la définition de Lamé leur attribue, au contraire, une valeur négative. (Voir *Loc. cit.* § XXXII, page 53).

rentielles du premier ordre entre ces six courbures, car si l'on écrit les six équations qui précèdent de la façon suivante :

$$(60)\left\{\begin{aligned}
&\frac{l\Delta_1\varphi}{\psi} = -\Delta_1^{-1}\psi\cdot\frac{1}{R_2'}, \quad \frac{l\Delta_1\psi}{\varpi} = -\Delta_1^{-1}\varpi\cdot\frac{1}{R_2''}, \quad \frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi} = -\Delta_1^{-1}\varphi\cdot\frac{1}{R_2},\\
&\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi} = -\Delta_1^{-1}\varpi\cdot\frac{1}{R_1''}, \quad \frac{l\Delta_1\psi}{\varphi} = -\Delta_1^{-1}\varphi\cdot\frac{1}{R_1}, \quad \frac{l\Delta_1\varpi}{\psi} = -\Delta_1^{-1}\psi\cdot\frac{1}{R_1'},
\end{aligned}\right.$$

il en résultera nécessairement les trois conditions :

$$(61)\ \ldots\ \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{d\psi}\left(\Delta_1^{-1}\varpi\cdot\frac{1}{R_1''}\right) = \frac{d}{d\varpi}\left(\Delta_1^{-1}\psi\cdot\frac{1}{R_2'}\right),\\
&\frac{d}{d\varpi}\left(\Delta_1^{-1}\varphi\cdot\frac{1}{R_1}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\Delta_1^{-1}\varpi\cdot\frac{1}{R_2''}\right),\\
&\frac{d}{d\varphi}\left(\Delta_1^{-1}\psi\cdot\frac{1}{R_1'}\right) = \frac{d}{d\psi}\left(\Delta_1^{-1}\varphi\cdot\frac{1}{R_2}\right),
\end{aligned}\right.$$

lesquelles se déduisent les unes les autres par permutations circulaires des trois surfaces.

Or, la première étant développée peut s'écrire :

$$\Delta_1^{-1}\varpi\,\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_1''}\right) - \Delta_1^{-2}\varpi\cdot\frac{\Delta_1\varpi}{\psi}\cdot\frac{1}{R_1''} = \Delta_1^{-1}\psi\cdot\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_2'}\right) - \Delta_1^{-2}\psi\cdot\frac{\Delta_1\psi}{\varpi}\cdot\frac{1}{R_2'},$$

ou, en multipliant par $\Delta_1\psi\Delta_1\varpi$:

$$\Delta_1\psi\left\{\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_1''}\right) - \frac{l\Delta_1\varpi}{\psi}\cdot\frac{1}{R_1''}\right\} = \Delta_1\varpi\left\{\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_2'}\right) - \frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}\cdot\frac{1}{R_2'}\right\};$$

et en faisant dès lors les substitutions indiquées par les valeurs (60), elle devient la première des trois relations :

$$(62)\ \ldots\ \left\{\begin{aligned}
&\Delta_1\psi\,\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_1''}\right) + \frac{1}{R_1'R_1''} = \Delta_1\varpi\,\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_2'}\right) + \frac{1}{R_2''R_2'},\\
&\Delta_1\varpi\,\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_1}\right) + \frac{1}{R_1''R_1} = \Delta_1\varphi\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R_2''}\right) + \frac{1}{R_2R_2''},\\
&\Delta_1\varphi\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R_1'}\right) + \frac{1}{R_1R_1'} = \Delta_1\psi\,\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{R_2'R_2},
\end{aligned}\right.$$

les deux autres se déduisant de la première suivant la même loi que les équations (60) et (61) dont elles ne sont que les conséquences.

Mais ces trois relations différentielles déduites immédiatement de la forme des expressions (59) ne sont pas les seules qui existent entre les six courbures principales. On comprend en effet que toute relation entre les trois paramètres différentiels $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$ et leur dérivées par rapport aux coordonnées curvilignes donnera lieu, en agissant comme nous venons de le faire, c'est-à-dire par la substitution à la place de leurs dérivées premières des valeurs qui résultent des équations (60), à une équation différentielle correspondante entre ces six courbures et les trois paramètres du premier ordre $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$. Or il est facile de voir *à priori* qu'il existe au moins trois relations différentielles du second ordre entre ces trois paramètres, à l'exclusion de toute autre fonction, qui devront donner lieu, par conséquent, à autant d'équations différentielles du genre des équations (62).

En effet, si partant des équations de définition :

$$\Delta_1^2\varphi=\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2,\quad \Delta_1^2\psi=\left(\frac{\psi}{x}\right)^2+\left(\frac{\psi}{y}\right)^2+\left(\frac{\psi}{z}\right)^2,\quad \Delta_1^2\varpi=\left(\frac{\varpi}{x}\right)^2+\left(\frac{\varpi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varpi}{z}\right)^2,$$

et y joignant les conditions d'orthogonalité du système (48), nous formions toutes les dérivées de ces équations jusqu'au second ordre compris, chacune nous fournissant (en la comprenant elle-même) 10 équations, nous obtiendrions un nombre total de 60 équations entre les trois paramètres $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, leurs dérivées jusqu'au second ordre, et les dérivées de φ, ψ et ϖ, par rapport à x, y, z, jusqu'au troisième ordre compris, mais à l'exclusion des trois quantités φ, ψ et ϖ elles-mêmes. Or, le nombre des dérivées d'une quantité jusqu'au $n^{\text{ième}}$ ordre inclus, en y comprenant la dérivée d'ordre 0, ou la fonction elle-même, étant le même que celui des termes d'un polynôme complet du même nombre de variables, et ayant, par conséquent, pour expression dans le cas de trois variables indépendantes

$\frac{1}{1.2.3}(n+1)(n+2)(n+3)$, on voit que, pour $n=3$, le nombre de ces dérivées, y compris la fonction, sera égal à 20; ce qui fait pour les trois fonctions φ, ψ, ϖ, un total de 60 quantités. Mais, les trois fonctions φ, ψ, ϖ ne figurant pas elles-mêmes dans les équations en question, il n'y entrera donc en fait que 57 quantités, lesquelles étant éliminées entre les 60 équations susdites, donneront lieu *au moins* à trois équations différentielles du second ordre entre les trois paramètres $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$.

Bien que les équations dont nous reconnaissons ainsi l'existence soient aux dérivées partielles par rapport aux coordonnées rectilignes x, y, z, elles n'en impliquent pas moins l'existence d'un pareil nombre d'équations correspondantes du même ordre aux dérivées partielles par rapport aux coordonnées curvilignes; car, quel que soit le changement de variables indépendantes, les dérivées par rapport aux anciennes variables pourront toujours s'exprimer en fonction des dérivées du même ordre par rapport aux nouvelles variables et des dérivées d'ordre inférieur. Or, du moment que nous avons en vue d'arriver en fin de compte à des relations différentielles entre les courbures principales du système, il est clair que nous aurons tout avantage à adopter de prime abord pour variables les coordonnées curvilignes, puisque les relations (60) nous permettront très simplement d'introduire dans les équations définitives les courbures principales et leurs dérivées premières, à la place des derivées premières et secondes des trois paramètres $\Delta_1\varphi$, $\Delta\psi_1$, $\Delta_1\varpi$.

Il se trouve en outre que ces équations différentielles entre ces trois paramètres, qui seraient certainement extrêmement compliquées en conservant les coordonnées rectilignes, et sans doute impossibles à calculer par la méthode qui nous a servi à constater leur existence, deviennent, au contraire, très simples et faciles à obtenir, en ayant recours aux coordonnées curvilignes et faisant usage des calculs établis jusqu'ici.

Remarquons aussi que, si le raisonnement qui précède établit avec certitude l'existence de trois relations différentielles du second ordre entre les trois paramètres $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, il n'exclut pas la possibilité d'un plus grand nombre d'équations du même ordre entre ces mêmes quantités; car il peut arriver que l'élimination des 57 dérivées de φ, ψ et ϖ, entre les 60 équations spécifiées à ce propos donne lieu à plus de trois équations. C'est ce qui arrive en effet, car il existe en fait ***six*** équations de ce genre, d'où six équations correspondantes entre les six courbures principales et les trois paramètres différentiels du premier ordre, lesquelles, jointes aux équations (62), donneront un total de *neuf* équations de cette espèce, qui exprimeront chacune une propriété caractéristique du système orthogonal. Mais le raisonnement que nous avons présenté n'en conserve pas moins toute sa valeur pour autoriser la recherche de semblables équations, qui sans cela n'aurait aucun fondement, ni aucune chance sérieuse d'aboutir à quelque résultat utile.

Pour procéder à cette recherche, nous emprunterons à Lamé l'esprit de sa méthode, lequel consiste à exprimer les conditions d'intégrabilité des valeurs des dérivées des neuf cosinus λ, μ, ν, λ', μ', ν', λ'', μ'', ν'', en fonction des trois paramètres différentiels et des six courbures principales du système. Mais les formules que nous avons présentées à l'occasion de notre seconde démonstration du théorème de Charles Dupin nous permettront de simplifier notablement ses calculs, en même temps que notre notation plus claire et plus expressive rendra la lecture de nos calculs beaucoup plus facile.

En effet la substitution des coordonnées curvilignes φ, ψ et ϖ comme variables indépendantes aux coordonnées rectilignes x, y, z, donne une forme beaucoup plus simple, non seulement aux expressions des six courbures principales, ainsi que nous l'avons déjà vu, mais encore à toutes les formules qui résultent du théorème de Charles Dupin, c'est-à-dire à toutes les équations des tableaux (49^{bis}) et (55), où tous les premiers membres A, B, C doivent être remplacés par 0, comme nous l'avons expliqué; car, en appliquant les formules de transformation (58) que nous avons données pour les dérivées premières, et disposant par colonnes horizontales les trois groupes de trois équations qui formaient les colonnes verticales des tableaux (49^{bis}) et (55), on voit que ces 27. équations prendront la forme :

$$(63)\left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{\lambda}{\psi}\Delta_1\psi-\dfrac{\lambda'}{R_1}=0, & \dfrac{\lambda'}{\varpi}\Delta_1\varpi-\dfrac{\lambda''}{R'_1}=0, & \dfrac{\lambda''}{\varphi}\Delta_1\varphi-\dfrac{\lambda}{R''_1}=0,\\
\dfrac{\mu}{\psi}\Delta_1\psi-\dfrac{\mu'}{R_1}=0, & \dfrac{\mu'}{\varpi}\Delta_1\varpi-\dfrac{\mu''}{R'_1}=0, & \dfrac{\mu''}{\varphi}\Delta_1\varphi-\dfrac{\mu}{R''_1}=0,\\
\dfrac{\nu}{\psi}\Delta_1\psi-\dfrac{\nu'}{R_1}=0; & \dfrac{\nu'}{\varpi}\Delta_1\varpi-\dfrac{\nu''}{R'_1}=0, & \dfrac{\nu''}{\varphi}\Delta_1\varphi-\dfrac{\nu}{R''_1}=0,\\
\dfrac{\lambda}{\varpi}\Delta_1\varpi-\dfrac{\lambda''}{R_2}=0, & \dfrac{\lambda'}{\varphi}\Delta_1\varphi-\dfrac{\lambda}{R'_2}=0, & \dfrac{\lambda''}{\psi}\Delta_1\psi-\dfrac{\lambda'}{R''_2}=0,\\
\dfrac{\mu}{\varpi}\Delta_1\varpi-\dfrac{\mu''}{R_2}=0, & \dfrac{\mu'}{\varphi}\Delta_1\varphi-\dfrac{\mu}{R'_2}=0, & \dfrac{\mu''}{\psi}\Delta_1\psi-\dfrac{\mu'}{R''_2}=0,\\
\dfrac{\nu}{\varpi}\Delta_1\varpi-\dfrac{\nu''}{R_2}=0, & \dfrac{\nu'}{\varphi}\Delta_1\varphi-\dfrac{\nu}{R'_2}=0, & \dfrac{\nu''}{\psi}\Delta_1\psi-\dfrac{\nu'}{R''_2}=0,\\
\dfrac{\lambda}{\varphi}\Delta_1\varphi+\dfrac{\lambda''}{R''_1}+\dfrac{\lambda'}{R'_2}=0, & \dfrac{\lambda'}{\psi}\Delta_1\psi+\dfrac{\lambda}{R_1}+\dfrac{\lambda''}{R''_2}=0, & \dfrac{\lambda''}{\varpi}\Delta_1\varpi+\dfrac{\lambda'}{R'_1}+\dfrac{\lambda}{R_2}=0,\\
\dfrac{\mu}{\varphi}\Delta_1\varphi+\dfrac{\mu''}{R''_1}+\dfrac{\mu'}{R'_2}=0, & \dfrac{\mu'}{\psi}\Delta_1\psi+\dfrac{\mu}{R_1}+\dfrac{\mu''}{R''_2}=0, & \dfrac{\mu''}{\varpi}\Delta_1\varpi+\dfrac{\mu'}{R'_1}+\dfrac{\mu}{R_2}=0,\\
\dfrac{\nu}{\varphi}\Delta_1\varphi+\dfrac{\nu''}{R''_1}+\dfrac{\nu'}{R'_2}=0, & \dfrac{\nu'}{\psi}\Delta_1\psi+\dfrac{\nu}{R_1}+\dfrac{\nu''}{R''_2}=0, & \dfrac{\nu''}{\varpi}\Delta_1\varpi+\dfrac{\nu'}{R'_1}+\dfrac{\nu}{R_2}=0,
\end{array}\right.$$

lesquelles donnent immédiatement les valeurs de toutes les dérivées premières par rapport aux coordonnées curvilignes des neuf cosinus directeurs des trois normales du système. On voit de suite alors qu'on obtiendra les équations cherchées, en opérant avec ces valeurs comme nous l'avons fait avec les valeurs (60) pour obtenir les équations (62), c'est-à-dire en écrivant les conditions d'intégrabilité qui en résultent, puis en éliminant, d'abord les dérivées de ces neuf cosinus à l'aide de ces mêmes équations (63), puis les neuf cosinus eux-mêmes à l'aide des équations (42), et enfin remplaçant dans les équations restantes les dérivées des paramètres différentiels $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, par leurs valeurs en fonction des six courbures principales tirées des équations (60).

Opérant ainsi pour le premier cosinus λ, nous formerons les trois équations :

$$\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)=\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\lambda}{\varpi}\right),\quad \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\lambda}{\varpi}\right)=\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{\lambda}{\varphi}\right),\quad \frac{d}{d\psi}\left(\frac{\lambda}{\varphi}\right)=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\lambda}{\psi}\right),$$

où $\frac{\lambda}{\varphi}$, $\frac{\lambda}{\psi}$, $\frac{\lambda}{\varpi}$ représentent les valeurs tirées des premières équations de chaque groupe de la colonne verticale de gauche du tableau (63), c'est-à-dire, par conséquent, les trois équations :

$$(64)\ \ .\ .\ \left\{\begin{aligned}&\frac{d}{d\varpi}\left(\Delta_1^{-1}\psi.\frac{\lambda'}{R_1}\right)=\frac{d}{d\psi}\left(\Delta_1^{-1}\varpi.\frac{\lambda''}{R_2}\right),\\ &\frac{d}{d\varphi}\left(\Delta_1^{-1}\varpi.\frac{\lambda''}{R_2}\right)=\frac{d}{d\varpi}\left[-\Delta_1^{-1}\varphi\left(\frac{\lambda''}{R_1''}+\frac{\lambda'}{R_2'}\right)\right],\\ &\frac{d}{d\psi}\left[-\Delta_1^{-1}\varphi.\left(\frac{\lambda''}{R_1''}+\frac{\lambda'}{R_2'}\right)\right]=\frac{d}{d\varphi}\left(\Delta_1^{-1}\psi.\frac{\lambda'}{R_1}\right).\end{aligned}\right.$$

Occupons-nous d'abord de la première. Elle deviendra successivement : en la développant d'abord,

$$\begin{aligned}&\Delta_1^{-1}\psi.\lambda'.\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_1}\right)+\Delta_1^{-1}\psi.\frac{1}{R_1}.\frac{\lambda'}{\varpi}-\Delta_1^{-1}\psi.\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}.\frac{\lambda'}{R_1}\\ &=\Delta_1^{-1}\varpi.\lambda''.\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_2}\right)+\Delta_1^{-1}\varpi.\frac{1}{R_2}.\frac{\lambda''}{\psi}-\Delta_1^{-1}\varpi.\frac{l\Delta_1\varpi}{\psi}.\frac{\lambda''}{R_2};\end{aligned}$$

puis, en multipliant par $\Delta_1\varpi\Delta_1\varphi$,

$$\begin{aligned}&\Delta_1\varpi\left[\lambda'\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_1}\right)+\frac{1}{R_1}.\frac{\lambda'}{\varpi}\right]-\Delta_1\varpi\frac{l\Delta_1\psi}{\varpi}.\frac{\lambda'}{R_1}\\ &=\Delta_1\psi\left[\lambda''\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{R_2}.\frac{\lambda''}{\psi}\right]-\Delta_1\psi\frac{l\Delta_1\varpi}{\psi}.\frac{\lambda''}{R_2};\end{aligned}$$

puis enfin, en éliminant à la fois les dérivées des paramètres $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, à l'aide des équations (59), et les dérivées des neuf cosinus à l'aide des équations (63), il restera simplement :

$$\lambda'.\Delta_1\varpi\,\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_1}\right)+\frac{\lambda''}{R_1R_1'}+\frac{\lambda'}{R_2''R_1}=\lambda''.\Delta_1\psi\,\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_2}\right)+\frac{\lambda'}{R_2R_2''}+\frac{\lambda''}{R_1'R_2};$$

ou, en ordonnant :

$$(65)\quad \lambda'\left[\Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_1}\right)+\frac{1}{R_2''}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right]=\lambda''\left[\Delta_1\psi\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{R_1'}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\right].$$

En traitant de la même façon et *parallèlement* la seconde et la troisième des équations (64), nous obtiendrons de même successivement :

$$\Delta_1^{-1}\varpi.\lambda''.\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R_2}\right)+\Delta_1^{-1}\varpi.\frac{1}{R_2}.\frac{\lambda''}{\varphi}-\Delta_1^{-1}\varpi.\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}.\frac{\lambda''}{R_2}$$

$$=-\left[\Delta_1^{-1}\varphi\left\{\lambda''\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_1''}\right)+\lambda'\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_2'}\right)+\frac{1}{R_1''}.\frac{\lambda''}{\varpi}+\frac{1}{R_2'}.\frac{\lambda'}{\varpi}\right\}-\Delta_1^{-1}\varphi.\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}\left(\frac{\lambda''}{R_1''}+\frac{\lambda'}{R_2'}\right)\right]$$

$$-\left[\Delta_1^{-1}\varphi\left\{\lambda''\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_1''}\right)+\lambda'\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_2'}\right)+\frac{1}{R_1''}.\frac{\lambda''}{\psi}+\frac{1}{R_2'}.\frac{\lambda'}{\psi}\right\}-\Delta_1^{-1}\varphi.\frac{l\Delta_1\varphi}{\psi}\left(\frac{\lambda''}{R_1''}+\frac{\lambda'}{R_2'}\right)\right]$$

$$=\Delta_1^{-1}\psi.\lambda'.\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R_1}\right)+\Delta_1^{-1}\psi.\frac{1}{R_1}.\frac{\lambda'}{\varphi}-\Delta_1^{-1}\psi.\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}.\frac{\lambda'}{R_1};$$

ou, en chassant les dénominateurs, et faisant passer tous les termes dans un même membre :

$$\Delta_1\varphi\left[\lambda''\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{R_2}.\frac{\lambda''}{\varphi}\right]-\Delta_1\varphi\,\frac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}.\frac{\lambda''}{R_2}$$

$$+\Delta_1\varpi\left[\lambda''\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_1''}\right)+\lambda'\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_2'}\right)+\frac{1}{R_1''}.\frac{\lambda''}{\varpi}+\frac{1}{R_2'}.\frac{\lambda'}{\varpi}\right]-\Delta_1\varpi\frac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}\left(\frac{\lambda''}{R_1''}+\frac{\lambda'}{R_2'}\right)=0,$$

$$\Delta_1\psi\left[\lambda''\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_1''}\right)+\lambda'\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_2'}\right)+\frac{1}{R_1''}.\frac{\lambda''}{\psi}+\frac{1}{R_2'}.\frac{\lambda'}{\psi}\right]-\Delta_1\psi\frac{l\Delta_1\varphi}{\psi}\left(\frac{\lambda''}{R_1''}+\frac{\lambda'}{R_2'}\right)$$

$$+\Delta_1\varphi\left[\lambda'\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R_1}\right)+\frac{1}{R_1}.\frac{\lambda'}{\varphi}\right]-\Delta_1\varphi\,\frac{l\Delta_1\psi}{\varphi}.\frac{\lambda'}{R_1}=0;$$

ou encore en faisant, comme tout à l'heure, les substitutions indiquées par les formules (59) et le tableau (63) :

$$\lambda''.\Delta_1\varphi \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R_2}\right) + \frac{\lambda}{R_2 R_1''} + \frac{\lambda''}{R_2^2} + \Delta_1\varpi\left[\lambda''\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_1''}\right) + \lambda'\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_2'}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{R_1''}\left(\frac{\lambda'}{R_1'} + \frac{\lambda}{R_2}\right) + \frac{\lambda''}{R_2' R_1'} + \frac{1}{R_1''}\left(\frac{\lambda''}{R_1''} + \frac{\lambda'}{R_2'}\right) = 0,$$

$$\Delta_1\psi\left[\lambda''\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_1''}\right) + \lambda'\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_2'}\right)\right] + \frac{\lambda'}{R_1'' R_2''} - \frac{1}{R_2'}\left(\frac{\lambda}{R_1} + \frac{\lambda''}{R_2''}\right)$$
$$+\frac{1}{R_2'}\left(\frac{\lambda''}{R_1''} + \frac{\lambda'}{R_2'}\right) + \lambda'.\Delta_1\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R_1}\right) + \frac{\lambda}{R_1 R_2'} + \frac{\lambda'}{R_1^2} = 0,$$

équations qui, ordonnées comme la première par rapport à λ, λ', λ'', deviennent après réduction :

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned}
&\lambda'\left[\Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_2'}\right) + \frac{1}{R_1''}\left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_1'}\right)\right] \\
&+\lambda''\left[\Delta_1\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R_2}\right) + \Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_1''}\right) + \left(\frac{1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_1''}\right)^2 + \frac{1}{R_1' R_2'}\right] = 0, \\
&\lambda'\left[\Delta_1\psi\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_2'}\right) + \Delta_1\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R_1}\right) + \left(\frac{1}{R_2'}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_1}\right)^2 + \frac{1}{R_1'' R_2''}\right] \\
&+\lambda''\left[\Delta_1\psi\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_1''}\right) + \frac{1}{R_2'}\left(\frac{1}{R_1''} - \frac{1}{R_2''}\right)\right] = 0.
\end{aligned}\right.$$

Ayant ainsi obtenu les conditions d'intégrabilité relatives à l'un des cosinus directeurs des trois normales, il ne sera pas nécessaire, pour obtenir celles relatives aux autres cosinus, de recommencer pour chacun des calculs analogues. De simples permutations circulaires permettront de les déduire immédiatement des résultats qui précèdent, ainsi que nous allons l'expliquer.

En effet, passer du cosinus λ aux cosinus μ et ν, c'est permuter ensemble les trois axes rectangulaires des x, des y, et des z, sans changer de surface, ce qui équivaudrait, dans les calculs qui précèdent, à permuter circulairement les trois lettres λ, μ, ν, quels que soient leurs accents, sans toucher aux lettres φ, ψ et ϖ, ni aux rayons de courbure qui en dépendent; et de même, passer du cosinus λ aux cosinus λ' et λ'', c'est, au contraire, permuter ensemble les trois surfaces coordonnées sans changer

6

les axes rectangulaires, ce qui revient à permuter non seulement les trois lettres φ, ψ et ϖ, mais encore les rayons principaux qui appartiennent à ces surfaces, et les cosinus directeurs de leurs normales, c'est-à-dire à conserver les trois lettres λ, μ, ν, mais en permutant leur accentuation.

Un simple coup d'œil jeté sur le tableau (63) montre que les valeurs qui résultent de ces équations pour les dérivées des neuf cosinus se déduisent bien, comme cela devait être, les unes des autres suivant cette loi; car, ayant eu soin, comme nous l'avons fait, de partager ce tableau en trois colonnes horizontales de trois lignes chacune, on voit que le premier mode de permutation sera réalisé en permutant les trois lignes de chacune de ces colonnes, et le second en permutant, au contraire, les trois colonnes verticales du même tableau, lesquelles correspondent chacune à l'une des surfaces coordonnées.

N'ayant donc fait usage, pour transformer les conditions (64), que de ces équations (63), et des formules (59) qui ne sont pas atteintes par la permutation des trois axes rectangulaires, il suit de là que nous obtiendrons les conditions d'intégrabilité relatives aux deux autres cosinus μ et ν, par la simple permutation des trois axes des x, des y et des z, sans toucher aux surfaces ni aux rayons principaux; et, par conséquent, si nous posons pour abréger

$$(67)\left\{\begin{aligned}
&P=\Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_1}\right)+\frac{1}{R''_2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right),\quad Q=\Delta_1\psi\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{R'_1}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right),\\
&P'=\Delta_1\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R'_1}\right)+\frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{R'_1}-\frac{1}{R'_2}\right),\quad Q'=\Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R'_2}\right)+\frac{1}{R''_1}\left(\frac{1}{R'_2}-\frac{1}{R'_1}\right),\\
&P''=\Delta_1\psi\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R''_1}\right)+\frac{1}{R'_2}\left(\frac{1}{R''_1}-\frac{1}{R''_2}\right),\quad Q''=\Delta_1\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R''_2}\right)+\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{R''_2}-\frac{1}{R''_1}\right),\\
&T=\Delta_1\psi\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R'_1}\right)+\Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R''_2}\right)+\left(\frac{1}{R'_1}\right)^2+\left(\frac{1}{R''_2}\right)^2+\frac{1}{R_1R_2},\\
&T'=\Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R''_1}\right)+\Delta_1\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R_2}\right)+\left(\frac{1}{R''_1}\right)^2+\left(\frac{1}{R_2}\right)^2+\frac{1}{R'_1R'_2},\\
&T''=\Delta_1\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R_1}\right)+\Delta_1\psi\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R'_2}\right)+\left(\frac{1}{R_1}\right)^2+\left(\frac{1}{R'_2}\right)^2+\frac{1}{R''_1R''_2},
\end{aligned}\right.$$

les trois groupes (P, P′, P″), (Q, Q′, Q″), (T, T′, T″) formant chacun un cycle résultant de la permutation circulaire des trois surfaces, les trois équations (65) et (66) que nous avons obtenues pour forme définitive des conditions (64) pouvant s'écrire

$$\lambda' P - \lambda'' Q = 0, \quad \lambda' Q' + \lambda'' T' = 0, \quad \lambda' T'' + \lambda'' P'' = 0,$$

les conditions d'intégrabilité fournies par les trois cosinus λ, μ, ν, seront respectivement

$$\left\{\begin{array}{lll} \lambda' P - \lambda'' Q = 0, & \lambda' Q' + \lambda'' T' = 0, & \lambda' T'' + \lambda'' P'' = 0, \\ \mu' P - \mu'' Q = 0, & \mu' Q' + \mu'' T' = 0, & \mu' T'' + \mu'' P'' = 0, \\ \nu' P - \nu'' Q = 0, & \nu' Q' + \nu'' T' = 0, & \nu' T'' + \nu'' P'' = 0; \end{array}\right.$$

et en éliminant les neuf cosinus entre ces neuf équations et les équations (42), il nous restera définitivement six équations du genre de celles que nous cherchons, c'est-à-dire entre les trois paramètres différentiels du premier ordre, les six courbures principales, et leurs dérivées par rapport aux coordonnées curvilignes. Or, pour faire cette élimination, il n'y a qu'à ajouter par colonnes verticales les équations qui précèdent, successivement multipliées, d'abord par λ', μ', ν', puis par λ'', μ'', ν''; ce qui donnera en vertu des équations (42) :

$$\begin{array}{lll} P = 0, & Q' = 0, & T'' = 0, \\ Q = 0, & T' = 0, & P'' = 0. \end{array}$$

Pour passer de ces équations, fournies par la considération des cosinus λ, μ, ν, à celles que donnerait de même la considération des cosinus λ', μ', ν', il faudrait, comme nous l'avons expliqué, permuter les trois surfaces sans toucher aux axes rectangulaires, à la fois, dans les conditions d'intégrabilité analogues à (64), dans les équations (63) et dans les formules (59), qui nous ont seules servi à les transformer, ce qui revient évidemment à effectuer la même permutation dans le résultat définitif de la transformation, c'est-à-dire dans les équations qui précèdent immédiatement; d'où, les six équations suivantes,

$$\begin{array}{lll} P' = 0, & Q'' = 0, & T = 0, \\ Q' = 0, & T'' = 0, & P = 0; \end{array}$$

et il est facile de voir que la considération des trois derniers cosinus λ'', μ'', ν'' ne donnerait aucune équation nouvelle, la permutation circulaire effectuée avec les équations que nous venons d'écrire ne faisant que ramener des équations déjà obtenues.

En résumé, les conditions d'intégrabilité résultant de la forme des valeurs des dérivées des neuf cosinus des trois normales, fournies par les vingt-sept équations du tableau (63), nous ont donné, en définitive, entre les trois paramètres différentiels du premier ordre et les six courbures principales, les neuf équations suivantes

$$(68) \ldots \quad \left\{ \begin{array}{lll} P = 0, & Q = 0, & T = 0, \\ P' = 0, & Q' = 0, & T' = 0, \\ P'' = 0, & Q'' = 0, & T'' = 0, \end{array} \right.$$

analogues aux trois équations (62) que nous avons déduites tout d'abord de la forme même des expressions (59) des six courbures principales du système, et qui ne sont elles-mêmes qu'une combinaison des précédentes, car on voit de suite en se reportant aux valeurs (67) que ces dernières sont respectivement identiques aux trois suivantes

$$Q' - P'' = 0, \quad Q'' - P = 0, \quad Q - P' = 0,$$

et, par conséquent, ne sont pas distinctes des équations (68) au point de vue analytique.

Parmi les autres combinaisons en nombre infini que l'on peut former avec ces neuf équations, nous remarquerons encore les suivantes, susceptibles comme elles d'une interprétation géométrique très remarquable, à savoir :

$$(69). \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R_1} Q' + \frac{1}{R'_2} P = 0, \quad \frac{1}{R'_1} Q'' + \frac{1}{R''_2} P' = 0, \quad \frac{1}{R''_1} Q + \frac{1}{R_2} P'' = 0, \\ \qquad\qquad T + T' + T'' = 0. \end{array} \right.$$

La première de ces quatre équations pouvant s'écrire

$$\Delta_1 \varpi \frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_1 R'_2}\right) + \frac{1}{R_1 R'_2}\left(\frac{1}{R''_1} + \frac{1}{R''_2}\right) = \frac{1}{R_1 R'_1 R''_1} + \frac{1}{R_2 R'_2 R''_2},$$

et le second membre de cette dernière équation ne changeant pas par la permutation des trois surfaces, on voit de suite que les trois premières équations pourront se mettre sous la forme :

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta_1\varpi \frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_1R'_2}\right)+\frac{1}{R_1R'_2}\left(\frac{1}{R''_1}+\frac{1}{R''_2}\right)=\Delta_1\varphi \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R'_1R''_2}\right)+\frac{1}{R'_1R''_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\\ &=\Delta_1\psi \frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R''_1R_2}\right)+\frac{1}{R''_1R_2}\left(\frac{1}{R'_1}+\frac{1}{R'_2}\right)=\frac{1}{R_1R'_1R''_1}+\frac{1}{R_2R'_2R''_2}. \end{aligned}\right.$$

Quant à la quatrième équation (69), si nous posons par analogie avec notre notation déjà employée

$$(71)\ .\quad H=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2},\quad H'=\frac{1}{R'_1}+\frac{1}{R'_2},\quad H''=\frac{1}{R''_1}+\frac{1}{R''_2},$$

il est facile de voir qu'elle pourra s'écrire :

$$(72)\quad \Delta_1\varphi\frac{H}{\varphi}+\Delta_1\psi\frac{H'}{\psi}+\Delta_1\varpi\frac{H''}{\varpi}+H^2+H'^2+H''^2=\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R'_1R'_2}+\frac{1}{R''_1R''_2}.$$

Pour interpréter ces équations, nous écrirons les termes différentiels qui y figurent sous une forme qui manifeste beaucoup mieux leur signification géométrique.

En effet, si nous désignons respectivement par $\delta, \delta', \delta''$ des caractéristiques d'accroissements infiniment petits, correspondant aux variations $\delta\varphi, \delta\psi, \delta\varpi$ considérées chacune isolément, c'est-à-dire en faisant varier une seule des trois coordonnées curvilignes, et que nous appelions par analogie avec nos notations antérieures $\delta n, \delta n', \delta n''$ les trois éléments de normale compris entre deux surfaces infiniment voisines de chaque famille, ayant par la formule (40^{bis})

$$\frac{\Delta_1\varphi}{\delta\varphi}=\frac{1}{\delta n},\quad \frac{\Delta_1\psi}{\delta\psi}=\frac{1}{\delta n'},\quad \frac{\Delta_1\varpi}{\delta\varpi}=\frac{1}{\delta n''},$$

on voit, en remontant à la définition des dérivées partielles que nous aurons pour une fonction de point quelconque ω.

$$(73).\quad .\quad \Delta_1\varphi\frac{d\omega}{d\varphi}=\frac{\delta\omega}{\delta n},\quad \Delta_1\psi\frac{d\omega}{d\psi}=\frac{\delta'\omega}{\delta n'},\quad \Delta_1\varpi\frac{d\omega}{d\varpi}=\frac{\delta''\omega}{\delta n''},$$

notation qui pourra s'appliquer à tous les termes différentiels des équations que nous avons obtenues.

Il importe de bien s'entendre sur la signification des rapports qui précèdent. Chacun d'eux représente le quotient de l'accroissement d'une fonction de point ω pour deux points infiniment voisins pris sur une certaine ligne ou dans une certaine direction, divisé par la distance infiniment petite de ces deux points. Un tel rapport est donc en réalité la valeur particulière d'une certaine dérivée, mais de la dérivée d'une fonction qui change chaque fois avec la direction de la ligne que l'on considère, car si nous représentons pour un instant par $F(x, y, z)$ la fonction de point ω, et par $x = f_1(s)$, $y = f_2(s)$, $z = f_3(s)$, les équations de la ligne en question supposées exprimées en fonction de l'arc s que nous supposerons compté pour plus de simplicité à partir du point considéré lui-même, on voit qu'un rapport de cette sorte exprime la valeur pour $s = 0$ de la dérivée $\frac{dF(f_1(s), f_2(s), f_3(s))}{ds}$, c'est-à-dire de la dérivée de différentes fonctions qui, bien que provenant originairement de la même fonction $F(x, y, z)$, varient néanmoins suivant les fonctions f_1, f_2, f_3, qu'on y a substituées, ou, ce qui est la même chose, suivant la direction de la ligne considérée. Ces rapports sont donc complètement analogues à la dérivée d'une fonction imaginaire qui n'a, elle aussi, dans le cas général, de signification et de valeur déterminée, qu'à la condition de définir le chemin supposé suivi par la variable à partir de la valeur que l'on considère. Nous proposerons alors pour les rapports de cette espèce la dénomination générale de *dérivée géométrique de la fonction de point* ω (*), afin de rappeler que leur définition comporte essentiellement la désignation d'une certaine direction, et nous les distinguerons

(*) Lamé désigne les mêmes rapports par le nom de *variation*, mais cette dénomination a le tort, suivant nous, d'aller contre un usage consacré de longue date, qui attribue à cette dernière locution le sens d'un accroissement infiniment petit, et de pouvoir, en conséquence, occasionner de fâcheuses confusions entre des grandeurs finies et des quantités infiniment petites. C'est pourquoi nous n'avons pas cru devoir l'adopter.

Nous n'avons pas conservé non plus pour les rapports en question sa notation qui est la même que pour les dérivées partielles ordinaires, et qui peut amener dans l'esprit une confusion d'un autre genre; car ayant désigné par s, s_1, s_2 les trois arcs d'intersection des dans le langage des dérivées ordinaires de la fonction ω en faisant suivre immédiatement le mot *dérivée* de l'indication de la direction à laquelle elle se rapporte, en sorte que, tandis que l'on dit pour celles-ci *dérivée* de ω *par rapport* à telle ou telle *variable*, nous dirons pour celles-là *dérivées* de ω *suivant* telle *ligne* ou telle *direction*.

Le sens des rapports (73) étant nettement fixé, nous récrirons à l'aide de cette notation les équations (68), (62), (70) et (72) qui deviendront alors les suivantes :

$$(74).\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\delta''\left(\frac{1}{R_1}\right)}{\delta n''} = -\frac{1}{R_2''}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right), \qquad \frac{\delta'\left(\frac{1}{R_2}\right)}{\delta n'} = -\frac{1}{R_1'}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right),\\
&\frac{\delta\left(\frac{1}{R_1'}\right)}{\delta n} = -\frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{R_1'}-\frac{1}{R_2'}\right), \qquad \frac{\delta''\left(\frac{1}{R_2'}\right)}{\delta n''} = -\frac{1}{R_1''}\left(\frac{1}{R_2'}-\frac{1}{R_1'}\right),\\
&\frac{\delta'\left(\frac{1}{R_1''}\right)}{\delta n'} = -\frac{1}{R_2'}\left(\frac{1}{R_1''}-\frac{1}{R_2''}\right), \qquad \frac{\delta\left(\frac{1}{R_2''}\right)}{\delta n} = -\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{R_2''}-\frac{1}{R_1''}\right),
\end{aligned}\right.$$

$$(75).\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{R_1R_2} + \left(\frac{1}{R_2''}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_1'}\right)^2 = -\left(\frac{\delta''\left(\frac{1}{R_2''}\right)}{\delta n''} + \frac{\delta'\left(\frac{1}{R_1'}\right)}{\delta n'}\right),\\
&\frac{1}{R_1'R_2'} + \left(\frac{1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_1''}\right)^2 = -\left(\frac{\delta\left(\frac{1}{R_2}\right)}{\delta n} + \frac{\delta''\left(\frac{1}{R_1''}\right)}{\delta n''}\right),\\
&\frac{1}{R_1''R_2''} + \left(\frac{1}{R_2'}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_1}\right)^2 = -\left(\frac{\delta'\left(\frac{1}{R_2'}\right)}{\delta n'} + \frac{\delta\left(\frac{1}{R_1}\right)}{\delta n}\right).
\end{aligned}\right.$$

---

trois surfaces, la notation $\frac{d}{ds}$, $\frac{d}{ds_1}$, $\frac{d}{ds_2}$ qu'il emploie pour ces rapports, peut laisser croire (si l'on prend ses formules en bloc, et sans avoir suivi les calculs par lesquels il les établit) qu'il s'agit là de dérivées partielles par rapport à trois variables, qui seraient respectivement s, s_1, s_2, tandis que ces mêmes rapports ont en réalité, comme nous l'avons employé, une signification toute différente (Cf. *loc. cit.*, § XLVI, p. 80). — Nous prévenons cette nouvelle erreur, en substituant dans ces rapports la caractéristique δ à la caractéristique d des dérivées partielles, et les éléments de normale δn, $\delta n'$, $\delta n''$, aux éléments d'arc ds, ds_1, ds_2, qui se confondent avec eux.

$$(76)\ \ldots\ \left\{\begin{aligned}
&\frac{\delta'\left(\dfrac{1}{R''_1}\right)}{\delta n'}-\frac{1}{R''_2R'_2}=\frac{\delta''\left(\dfrac{1}{R'_2}\right)}{\delta n''}-\frac{1}{R'_1R''_1},\\
&\frac{\delta''\left(\dfrac{1}{R_1}\right)}{\delta n''}-\frac{1}{R_2R''_2}=\frac{\delta\left(\dfrac{1}{R''_2}\right)}{\delta n}-\frac{1}{R''_1R_1},\\
&\frac{\delta\left(\dfrac{1}{R'_1}\right)}{\delta n}-\frac{1}{R'_2R_2}=\frac{\delta'\left(\dfrac{1}{R_2}\right)}{\delta n'}-\frac{1}{R_1R'_1}.
\end{aligned}\right.$$

$$(77)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\delta''\left(\dfrac{1}{R_1R'_2}\right)}{\delta n''}+\frac{1}{R_1R'_2}\left(\frac{1}{R''_1}+\frac{1}{R''_2}\right)=\frac{\delta\left(\dfrac{1}{R'_1R''_2}\right)}{\delta n}+\frac{1}{R'_1R''_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\\
&\quad=\frac{\delta'\left(\dfrac{1}{R''_1R_2}\right)}{\delta n'}+\frac{1}{R''_1R_2}\left(\frac{1}{R'_1}+\frac{1}{R'_2}\right)=\frac{1}{R_1R'_1R''_1}+\frac{1}{R_2R'_2R''_2},
\end{aligned}\right.$$

$$(78).\ \frac{\delta H}{\delta n}+\frac{\delta' H'}{\delta n'}+\frac{\delta'' H''}{\delta n''}+H^2+H'^2+H''^2=\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R'_1R'_2}+\frac{1}{R''_1R''_2}.$$

Ce sont les équations (14) et (15) du § XLVI, et (16) et (18) du § XLVII des *Leçons sur les coordonnées curvilignes,* formules que Lamé obtient à la suite de calculs laborieux et d'une lecture assez pénible, mais qui par leur simplicité et leur élégance mériteraient de prendre place dans l'enseignement classique. Nous nous estimerons fort heureux, si les calculs que nous venons de présenter pour les établir paraissent assez simples et assez faciles pour remplir cet objet.

Pour les formuler en théorèmes, Lamé partage les six courbures principales en deux groupes, qu'il appelle respectivement *premières* et *secondes courbures,* telles que les trois courbures de chaque groupe s'échangent les unes dans les autres par la permutation des trois surfaces ; les trois courbures de chaque groupe sont donc celles qui dans nos formules sont affectées du même indice, et l'on peut remarquer que ce mode de partage est le seul qui donne pour chaque groupe trois courbures dont les rayons soient orthogonaux, c'est-à-dire formant un système de trois droites rectangulaires.

Il désigne, en outre, parmi ces six courbures principales sous le nom de :

1° *Courbures conjuguées en surface*, les deux courbures principales d'une même surface et qui sont, par conséquent, dans notre notation, celles qui ont le même accent ;

2° *Courbures conjuguées en arc*, les courbures de deux sections principales appartenant à des surfaces différentes, mais dirigées suivant la même normale, et qui sont, par conséquent, toutes deux tangentes au même arc d'intersection. Pour les reconnaître, il suffira évidemment, d'après la signification des équations (12), de prendre dans le tableau (49^{bis}), les courbures qui ont pour coefficients les cosinus de la même normale, c'est-à-dire respectivement

$$\frac{1}{R''_1} \text{ et } \frac{1}{R'_2}, \quad \frac{1}{R_1} \text{ et } \frac{1}{R''_2}, \quad \frac{1}{R'_1} \text{ et } \frac{1}{R_2};$$

3° *Courbures réciproques*, les courbures de deux sections principales appartenant à deux surfaces différentes, et telles que le plan de la première est dirigé suivant la normale de la surface à laquelle appartient la seconde; on voit de la même façon que tout à l'heure que ces courbures sont respectivement

$$\frac{1}{R_1} \text{ et } \frac{1}{R'_2}, \quad \frac{1}{R'_1} \text{ et } \frac{1}{R''_2}, \quad \frac{1}{R''_1} \text{ et } \frac{1}{R_2}.$$

Enfin, il appelle *plan d'une courbure*, le plan de la section normale à laquelle elle appartient; locution abrégée, à laquelle nous ajouterons par analogie celle de *tangente d'une courbure*, pour désigner la tangente de cette même section normale.

Si nous adoptons ces diverses dénominations, et en outre celle de *courbure sphérique* introduite par Gauss pour la somme des courbures principales de chaque surface, c'est-à-dire, avec nos notations (71), pour les trois quantités H, H', H'', les cinq groupes d'équations (74), (75), (76), (77) et (78) se formuleront en langage ordinaire par les cinq théorèmes suivants, qui tous ont rapport aux courbures principales seulement :

Théorème I. — *La dérivée d'une courbure suivant la normale à son plan est égale au produit changé de signe de sa conjuguée en arc, par son excès sur sa conjuguée en surface.*

Théorème II. — *Le produit des deux courbures d'une même surface, augmenté de la somme des carrés de leurs conjuguées en arc, est égal à la somme changée de signe des dérivées de ces deux dernières courbures suivant la normale de la surface à laquelle chacune appartient, ou encore suivant leurs tangentes réciproques.*

Théorème III. — *Si l'on forme pour chaque courbure l'excès de sa dérivée suivant la normale à son plan sur le produit de sa conjuguée en surface par sa conjuguée en arc, les différences ainsi obtenues sont égales pour deux courbures conjuguées en arc.*

Théorème IV. — *Si l'on multiplie la somme des deux courbures de chaque surface par le produit de leurs conjuguées en arc, et qu'on y ajoute la dérivée de ce même produit suivant la normale à la surface, les trois sommes ainsi obtenues seront égales entre elles, et égales chacune à la somme des produits des trois courbures de chaque groupe.*

Théorème V. — *Si l'on ajoute au carré de la courbure sphérique de chaque surface, la dérivée de cette courbure sphérique suivant la normale à la surface, et qu'on fasse la somme pour les trois surfaces, la somme ainsi obtenue sera égale à celle des produits qu'on obtient en multipliant l'une par l'autre les deux courbures de chaque surface.*

Ces propositions ainsi établies pour le cas général, examinons maintenant, à titre de corollaires, ce qu'elles deviennent dans le cas particulier le plus intéressant (*) au point de vue de l'appli-

---

(*) « Les seuls systèmes orthogonaux employés jusqu'ici, et qui ont permis de vaincre toutes les difficultés que présente l'intégration de l'équation (de l'équilibre de température) sont sans exception composés de trois familles de surfaces isothermes. » — (Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § LIII, p. 95.)

cation à la physique mathématique (qui était, comme on le sait, à l'origine le but de l'introduction des coordonnées curvilignes), à savoir celui où les trois surfaces coordonnées appartiennent toutes trois à la catégorie des surfaces *isothermes*.

Lorsqu'une famille de surfaces $F(x, y, z) = \varepsilon$ satisfait à cette condition, c'est-à-dire lorsqu'elle peut servir à caractériser l'ensemble des points affectés d'une même température dans un milieu solide homogène parvenu à l'état stationnaire au point de vue calorifique, son paramètre ε devant être constant pour tous les points d'une même surface en même temps que la température θ, et d'ailleurs variable d'une surface à l'autre ainsi que cette température est forcément une certaine fonction $f(\theta)$ de cette température, en sorte que son équation peut s'écrire en considérant θ comme un paramètre variable

$$F(x, y, z) = f(\theta), \quad \text{ou} \quad F_1(x, y, z) = \theta,$$

en la supposant résolue par rapport à θ (ce que Lamé appelle rapporter la famille de surfaces à son *paramètre thermométrique*). Mais, sous cette dernière forme, on voit que son premier membre, à savoir la fonction $F_1(x, y, z)$ devra satisfaire de même que θ, à l'équation de l'équilibre de température qui est, comme l'on sait $\Delta_2\theta = 0$, c'est-à-dire que l'on devra avoir : $\Delta_2 F_1(x, y, z) = 0$.

Supposons donc que les trois familles qui composent le système orthogonal étant isothermes, on ait mis leurs équations sous la forme que nous venons de dire, et que, par conséquent, nous ayons simultanément, d'après ce qui précède,

$$\Delta_2\varphi = 0, \quad \Delta_2\psi = 0, \quad \Delta_2\varpi = 0,$$

et voyons comment l'introduction de ces hypothèses modifiera les formules obtenues pour le cas général.

Pour cela il suffira de reporter simplement ces hypothèses dans la valeur (26) trouvée pour H dans le paragraphe III, supposée appliquée aux trois surfaces, en y introduisant en même temps la notation des coordonnées curvilignes définie par les équations (58), ce qui permettra de l'écrire successivement

$$H = \frac{1}{\Delta_1\varphi}\left[-\left(\lambda\frac{\Delta_1\varphi}{x} + \mu\frac{\Delta_1\varphi}{y} + \nu\frac{\Delta_1\varphi}{z}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\Delta_1\varphi}\left(-\Delta_1\varphi\frac{\Delta_1\varphi}{\varphi}\right) = -\Delta_1\varphi\frac{l\Delta_1\varphi}{\varphi};$$

en sorte que nous aurons ainsi dans ce cas pour les trois surfaces

$$(79).\ H = -\Delta_1\varphi\frac{l\Delta_1\varphi}{\varphi},\quad H' = -\Delta_1\psi\frac{l\Delta_1\psi}{\psi},\quad H'' = -\Delta_1\varpi\frac{l\Delta_1\varpi}{\varpi};$$

formules très remarquables, complètement analogues aux formules (59) si l'on tient compte des valeurs (71), et qui permettent de dire que le cas particulier que nous traitons se distingue du cas général en ce que les trois dérivées du premier ordre $\frac{\Delta_1\varphi}{\varphi}, \frac{\Delta_1\psi}{\psi}, \frac{\Delta_1\varpi}{\varpi}$ qui seules n'entraient point dans les formules (59), et n'étaient point susceptibles d'interprétation simple par rapport aux courbures dans le cas général, s'interprètent au contraire très simplement dans ce cas par les courbures sphériques des trois surfaces, auxquelles elles sont égales au signe près.

Ces dernières formules, écrites ainsi

$$(80).\ \frac{l\Delta_1\varphi}{\varphi} = -\Delta_1^{-1}\varphi\,.\,H,\quad \frac{l\Delta_1\psi}{\psi} = -\Delta_1^{-1}\psi\,.\,H',\quad \frac{l\Delta_1\varpi}{\varpi} = -\Delta\varpi_1^{-1}\,.\,H'',$$

et rapprochées des formules (60) montrent la possibilité d'obtenir immédiatement six équations particulières à ce cas, complètement analogues aux équations (62) ; car, ayant ainsi les valeurs de toutes les dérivées premières des trois quantités $l\Delta_1\varphi$, $l\Delta_1\psi$, $l\Delta_1\varpi$, les conditions d'intégrabilité qui résultent de ces valeurs nous fourniront neuf équations, dont les trois équations (61), et, en traitant les six autres comme nous avons traité celles-là pour obtenir les équations (62), nous devrons arriver facilement à six nouvelles équations analogues aux équations (62) et spéciales au cas des trois surfaces isothermes.

En effet, ces conditions d'intégrabilité que nous venons de mentionner sont, outre les équations (61), les suivantes

$$(81)\begin{cases}\dfrac{d}{d\psi}(\Delta_1^{-1}\varphi\,.\,\mathrm{H}) = \dfrac{d}{d\varphi}\left(\Delta_1^{-1}\psi\,.\,\dfrac{1}{\mathrm{R}'_2}\right) & \dfrac{d}{d\varpi}(\Delta_1^{-1}\varphi\,.\,\mathrm{H}) = \dfrac{d}{d\varphi}\left(\Delta_1^{-1}\varpi\,.\,\dfrac{1}{\mathrm{R}''_1}\right)\\ \dfrac{d}{d\varpi}(\Delta_1^{-1}\psi\,.\,\mathrm{H}') = \dfrac{d}{d\psi}\left(\Delta_1^{-1}\varpi\,.\,\dfrac{1}{\mathrm{R}''_2}\right) & \dfrac{d}{d\varphi}(\Delta_1^{-1}\psi\,.\,\mathrm{H}') = \dfrac{d}{d\psi}\left(\Delta_1^{-1}\varphi\,.\,\dfrac{1}{\mathrm{R}_1}\right)\\ \dfrac{d}{d\varphi}(\Delta_1^{-1}\varpi\,.\,\mathrm{H}'') = \dfrac{d}{d\varpi}\left(\Delta_1^{-1}\varphi\,.\,\dfrac{1}{\mathrm{R}_2}\right) & \dfrac{d}{d\psi}(\Delta_1^{-1}\varpi\,.\,\mathrm{H}'') = \dfrac{d}{d\varpi}\left(\Delta_1^{-1}\psi\,.\,\dfrac{1}{\mathrm{R}'_1}\right).\end{cases}$$

lesquelles se partagent en deux groupes résultant chacun de la permutation des trois surfaces.

Traitant donc *parallèlement* les deux premières comme les équations (61), nous obtiendrons successivement

$$\begin{cases}\Delta_1^{-1}\varphi\,.\,\dfrac{\mathrm{H}}{\psi} - \Delta_1^{-1}\varphi\,.\,\dfrac{l\Delta_1\varphi}{\psi}\,.\,\mathrm{H} = \Delta_1^{-1}\psi\,.\,\dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}'_2}\right) - \Delta_1^{-1}\psi\,.\,\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{R}'_2}\\ \Delta_1^{-1}\varphi\,.\,\dfrac{\mathrm{H}}{\varpi} - \Delta_1^{-1}\varphi\,.\,\dfrac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}\,.\,\mathrm{H} = \Delta_1^{-1}\varpi\,.\,\dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}''_1}\right) - \Delta_1^{-1}\varpi\,.\,\dfrac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{R}''_1},\end{cases}$$

ou, en chassant les dénominateurs :

$$\begin{cases}\Delta_1\psi\,.\,\dfrac{\mathrm{H}}{\psi} - \Delta_1\psi\,\dfrac{l\Delta_1\varphi}{\psi}\,.\,\mathrm{H} = \Delta_1\varphi\,\dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}'_2}\right) - \Delta_1\varphi\,\dfrac{l\Delta_1\psi}{\varphi}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{R}'_2}\\ \Delta_1\varpi\,.\,\dfrac{\mathrm{H}}{\varpi} - \Delta_1\varpi\,\dfrac{l\Delta_1\varphi}{\varpi}\,.\,\mathrm{H} = \Delta_1\varphi\,\dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}''_1}\right) - \Delta_1\varphi\,\dfrac{l\Delta_1\varpi}{\varphi}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{R}''_1}\end{cases}$$

puis, en faisant à la fois les substitutions indiquées par les formules (59) et (71) :

$$\begin{cases}\Delta_1\psi\left[\dfrac{d}{d\psi}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}_1}\right) + \dfrac{d}{d\psi}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}_2}\right)\right] + \dfrac{1}{\mathrm{R}'_2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}_1} + \dfrac{1}{\mathrm{R}_2}\right)\\ = \Delta_1\varphi\,\dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}'_2}\right) + \dfrac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}'_2},\\ \Delta_1\varpi\left[\dfrac{d}{d\varpi}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}_1}\right) + \dfrac{d}{d\varpi}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}_2}\right)\right] + \dfrac{1}{\mathrm{R}''_1}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}_1} + \dfrac{1}{\mathrm{R}_2}\right)\\ = \Delta_1\varphi\,\dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}''_1}\right) + \dfrac{1}{\mathrm{R}_2\mathrm{R}''_1}.\end{cases}$$

équations que nous mettrons, en réduisant, sous la forme

$$(82).\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta_1\psi\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R'_2}\right)+\frac{1}{R'_2R_2}=\Delta_1\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R'_2}\right)-\Delta_1\psi\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_1}\right),\\ &\Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_1}\right)+\frac{1}{R''_1R'_1}=\Delta_1\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R''_1}\right)-\Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_2}\right),\end{aligned}\right.$$

en sorte que, si nous posons, pour abréger l'écriture,

$$(83)\quad \left\{\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned} \mathcal{P}&=\Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_1}\right)+\frac{1}{R''_1R_1},\\ \mathcal{P}'&=\Delta_1\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R'_1}\right)+\frac{1}{R_1R'_1},\\ \mathcal{P}''&=\Delta_1\psi\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R''_1}\right)+\frac{1}{R'_1R''_1},\end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{Q}&=\Delta_1\psi\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{R'_2R_2},\\ \mathcal{Q}'&=\Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R'_2}\right)+\frac{1}{R''_2R'_2},\\ \mathcal{Q}''&=\Delta_1\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R''_2}\right)+\frac{1}{R_2R''_2},\end{aligned}\right.\\ &\qquad\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{R}&=\Delta_1\psi\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R_1}\right)-\Delta_1\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R'_2}\right),\\ \mathcal{R}'&=\Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R'_1}\right)-\Delta_1\psi\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R''_2}\right),\\ \mathcal{R}''&=\Delta_1\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{R''_1}\right)-\Delta_1\varpi\frac{d}{d\varpi}\left(\frac{1}{R_2}\right),\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.$$

les trois groupes ($\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}''$), ($\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$, $\mathcal{Q}''$), ($\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}''$), formant encore trois cycles de permutation circulaire, les deux équations (82), que nous venons d'obtenir pour forme définitive des deux premières (81), pouvant s'écrire

$$\mathcal{Q}=-\mathcal{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}=\mathcal{R}'',$$

on voit que les six équations (81) seront alors les suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &\mathcal{Q}+\mathcal{R}=0, &&\mathcal{P}-\mathcal{R}''=0,\\ &\mathcal{Q}'+\mathcal{R}'=0, &&\mathcal{P}'-\mathcal{R}=0,\\ &\mathcal{Q}''+\mathcal{R}''=0, &&\mathcal{P}''-\mathcal{R}'=0,\end{aligned}\right.$$

tandis que les trois autres (62) du cas général, qui subsistent toujours, bien entendu, et complètent alors les neuf conditions d'intégrabilité ci-dessus mentionnées, deviennent avec les mêmes notations :

$$\mathfrak{P}'' - \mathfrak{Q}' = 0, \quad \mathfrak{P} - \mathfrak{Q}'' = 0, \quad \mathfrak{P}' - \mathfrak{Q} = 0.$$

Or, en retranchant successivement ces trois dernières équations des trois de droite du système précédent, nous obtenons celles-ci :

$$\mathfrak{Q} - \mathfrak{R} = 0, \quad \mathfrak{Q}' - \mathfrak{R}' = 0, \quad \mathfrak{Q}'' - \mathfrak{R}'' = 0,$$

lesquelles, par addition et soustraction avec les trois de gauche du même système, ramènent finalement les neuf équations (81) et (62) aux neuf suivantes :

$$(84) \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{lll} \mathfrak{P} = 0, & \mathfrak{Q} = 0, & \mathfrak{R} = 0, \\ \mathfrak{P}' = 0, & \mathfrak{Q}' = 0, & \mathfrak{R}' = 0, \\ \mathfrak{P}'' = 0, & \mathfrak{Q}'' = 0, & \mathfrak{R}'' = 0, \end{array} \right.$$

analogues aux équations (62) ou (68), et par conséquent susceptibles comme elles d'une interprétation géométrique intéressante.

Avant de formuler cette interprétation, nous signalerons parmi les combinaisons en nombre infini qu'on peut former avec ces équations (84), les quatre suivantes, qui correspondent également à des propriétés géométriques intéressantes, savoir

$$\frac{1}{R_1'}\mathfrak{Q}'' + \frac{1}{R_2''}\mathfrak{P}' = 0, \quad \frac{1}{R_1''}\mathfrak{Q} + \frac{1}{R_2}\mathfrak{P}'' = 0, \quad \frac{1}{R_1}\mathfrak{Q}' + \frac{1}{R_2'}\mathfrak{P} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(85) \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1\varphi \dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{1}{R_1'R_2''}\right) + \dfrac{1}{R_1R_2''}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) = 0, \\ \Delta_1\psi \dfrac{d}{d\psi}\left(\dfrac{1}{R_1''R_2}\right) + \dfrac{1}{R_1'R_2}\left(\dfrac{1}{R_1'} + \dfrac{1}{R_2'}\right) = 0, \\ \Delta_1\varpi \dfrac{d}{d\varpi}\left(\dfrac{1}{R_1R_2'}\right) + \dfrac{1}{R_1R_2'}\left(\dfrac{1}{R_1''} + \dfrac{1}{R_2''}\right) = 0, \end{array} \right.$$

et aussi celles-ci obtenues en combinant ces équations (84) avec celles du système (68) du cas général, savoir :

$$(86).\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{P}-\mathrm{P}=0,\quad \mathfrak{P}'-\mathrm{P}'=0,\quad \mathfrak{P}''-\mathrm{P}''=0,\\ \text{ou}\\ \mathfrak{Q}-\mathrm{Q}=0,\quad \mathfrak{Q}'-\mathrm{Q}'=0,\quad \mathfrak{Q}''-\mathrm{Q}''=0. \end{array}\right.$$

Cela posé, si nous récrivons les équations qui précèdent en faisant usage de la notation différentielle introduite par les formules (73), les équations (84), (85) et (86) deviendront respectivement les suivantes :

$$(87)\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\delta''\left(\frac{1}{R_1}\right)}{\delta n''}=-\dfrac{1}{R_1''R_1}, & \dfrac{\delta'\left(\frac{1}{R_2}\right)}{\delta n'}=-\dfrac{1}{R_2'R_2}, & \dfrac{\delta'\left(\frac{1}{R_1}\right)}{\delta n'}=\dfrac{\delta\left(\frac{1}{R_2'}\right)}{\delta n},\\ \dfrac{\delta\left(\frac{1}{R_1'}\right)}{\delta n}=-\dfrac{1}{R_1R_1'}, & \dfrac{\delta''\left(\frac{1}{R_2'}\right)}{\delta n''}=-\dfrac{1}{R_2''R_2'}, & \dfrac{\delta''\left(\frac{1}{R_1'}\right)}{\delta n''}=\dfrac{\delta'\left(\frac{1}{R_2''}\right)}{\delta n'},\\ \dfrac{\delta'\left(\frac{1}{R_1''}\right)}{\delta n'}=-\dfrac{1}{R_1'R_1''}, & \dfrac{\delta\left(\frac{1}{R_2''}\right)}{\delta n}=-\dfrac{1}{R_2R_2''}, & \dfrac{\delta\left(\frac{1}{R_1''}\right)}{\delta n}=\dfrac{\delta''\left(\frac{1}{R_2}\right)}{\delta n''}; \end{array}\right.$$

$$(88)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\delta\left(\frac{1}{R_1'R_2''}\right)}{\delta n}=-\dfrac{1}{R_1'R_2''}\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right),\\ \dfrac{\delta'\left(\frac{1}{R_1''R_2}\right)}{\delta n'}=-\dfrac{1}{R_1''R_2}\left(\dfrac{1}{R_1'}+\dfrac{1}{R_2'}\right),\\ \dfrac{\delta''\left(\frac{1}{R_1R_2'}\right)}{\delta n''}=-\dfrac{1}{R_1R_2'}\left(\dfrac{1}{R_1''}+\dfrac{1}{R_2''}\right). \end{array}\right.$$

$$(89)\ \ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{R_1''R_1}+\dfrac{1}{R_2''R_2}=\dfrac{1}{R_2''R_1},\\ \dfrac{1}{R_1R_1'}+\dfrac{1}{R_2R_2'}=\dfrac{1}{R_2R_1'},\\ \dfrac{1}{R_1'R_1''}+\dfrac{1}{R_2'R_2''}=\dfrac{1}{R_2'R_1''}. \end{array}\right.$$

Ces trois dernières équations représentent à elles seules les six équations (86), car la seconde ligne de ces équations reproduit exactement (mais dans un autre ordre) les équations fournies par celle de la première ligne.

Ces trois équations se réduisent d'ailleurs elles-mêmes à deux seulement, car, si l'on désigne pour un instant leurs premiers membres respectivement par A, B, C, il est facile de voir que l'on a identiquement

$$\frac{1}{R_1}C - \frac{1}{R_2''}B + \left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_1'}\right)A = 0,$$

et par conséquent l'une quelconque d'entre elles est une conséquence des deux autres. Elles se réduisent donc à deux équations distinctes seulement, pour lesquelles nous pouvons prendre, soit deux quelconques de ces trois équations, soit deux combinaisons linéaires de ces équations. En vue de conserver la symétrie entre les trois surfaces, nous choisirons pour cet objet les deux combinaisons suivantes

$$A + B + C = 0,$$

et,

$$A\left(\frac{1}{R_1'}+\frac{1}{R_2'}\right) + B\left(\frac{1}{R_1''}+\frac{1}{R_2''}\right) + C\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = 0,$$

c'est-à-dire les deux suivantes

$$(90).\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{R_1'R_1''} + \frac{1}{R_1''R_1} + \frac{1}{R_1R_1'} + \frac{1}{R_2'R_2''} + \frac{1}{R_2''R_2} + \frac{1}{R_2R_2'} \\ &\qquad = \frac{1}{R_2'R_1''} + \frac{1}{R_2''R_1} + \frac{1}{R_2R_1'}, \\ &\text{et} \\ &\qquad \frac{1}{R_1R_1'R_1''} + \frac{1}{R_2R_2'R_2''} = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette dernière relation, extrêmement remarquable par sa simplicité et son élégance, et qui vaudrait presque à elle seule la peine d'établir, pour y arriver, tous les calculs que nous venons de présenter, résulte aussi d'ailleurs immédiatement de la comparaison des formules (85) ou (88), avec les formules correspondantes (70) ou (77) du cas général, mais il nous semble à la fois plus logique et plus complet de la déduire comme corollaire des relations (89), dont elle n'est, comme l'on voit, qu'une conséquence algébrique.

Ces résultats établis, les formules (87), (88), (89) et (90) se traduiront en langage ordinaire par les six nouveaux théorèmes suivants qui caractérisent le cas particulier des trois surfaces isothermes :

Théorème VI. — *La dérivée d'une courbure appartenant à la surface* S, *suivant la normale à son plan, est égale au produit changé de signe de cette courbure par la courbure du même groupe dont le plan est dirigé suivant la normale de la surface* S.

Théorème VII. — *Les dérivées de deux courbures réciproques suivant leurs propres tangentes sont égales.*

Théorème VIII. — *Si l'on multiplie la somme des deux courbures de chaque surface par le produit de leurs conjuguées en arc, on obtiendra ainsi, changée de signe, la dérivée de ce dernier produit suivant la normale à la surface.*

Théorème IX. — *Si l'on prend successivement les trois surfaces deux à deux, la somme des produits des deux courbures de chaque groupe appartenant à ces deux surfaces est égale au produit des deux courbures conjuguées en arc empruntées à ces mêmes surfaces.*

Théorème X. — *La somme des produits deux à deux de toutes les courbures appartenant à chaque groupe est égale à la somme des produits des courbures conjuguées en arc.*

Théorème XI. — *La somme algébrique des produits des courbures de chaque groupe est nulle; ou encore : le produit des trois premières courbures est égal au produit des trois secondes courbures changé de signe.*

La méthode que nous avons suivie pour arriver aux propositions qui précèdent, et aux formules dont elles sont la traduction, est plus longue assurément que celle adoptée dans le même cas par Lamé, qui se borne à établir la seconde formule (90) (ou les théorèmes IX et XI qu'elle entraîne à cause du théorème IV du cas général). Mais elle a l'avantage, étant calquée en quelque sorte sur celle que nous avons suivie dans le cas général, de mieux faire ressortir les différences avec les résultats obtenus pour le cas général, c'est-à-dire de donner notamment les formules (87), (89), et la première des formules (90), qui ne se trouvent pas dans Lamé, et par conséquent de constituer pour nous une étude à la fois plus facile et plus complète de ce cas particulier intéressant.

Ayant ainsi esquissé, à titre d'exemple et d'application de nos formules, les principales propriétés des courbures du système triple orthogonal, nous reviendrons maintenant à la théorie des surfaces en général, pour examiner dans un dernier paragraphe ce qui se rapporte à la recherche des *ombilics*.

V. — Recherche des ombilics. Application a la surface des ondes.

On appelle *ombilic* un point d'une surface tel que les rayons de courbure de toutes les sections normales relatives à ce point sont tous égaux et de même signe.

Dans l'étude de la forme d'une surface, la question de savoir s'il existe des points semblables, et dans le cas affirmatif la détermination de ces points, s'impose évidemment aussitôt après la détermination des rayons principaux et des sections principales des points remarquables, comme étant de nature à donner à l'esprit l'idée la plus juste de la courbure générale de la surface. Cette recherche présentant donc une très grande importance, nous lui consacrerons exclusivement ce dernier paragraphe, dans lequel nous exposerons successivement les différentes méthodes qu'on peut déduire pour cet objet de nos théories précédentes, et qui, bien que basées sur des considérations fort diverses, doivent toutes, bien entendu, conduire au même système d'équations.

Première méthode. — La première, que l'on peut qualifier de *géométrique* par opposition aux suivantes qui sont purement analytiques, ressortira très simplement de la considération de la *surface indicatrice* et nous fournira les équations cherchées par un simple calcul de géométrie analytique.

En effet, dire que tous les rayons de courbure des sections normales sont égaux et de même signe, c'est dire que l'indicatrice est un cercle, et peut être représentée par conséquent par l'intersection d'une sphère décrite du point considéré comme centre par le plan tangent de la surface au même point. On devra donc obtenir les équations cherchées en exprimant que l'intersection de la surface indicatrice par cette sphère, qui dans le cas général devrait être une courbe à double courbure, se réduit dans le cas particulier actuel à une courbe plane, dont le plan est précisément le plan tangent à la surface.

Pour exprimer cette condition, si nous représentons pour un instant par

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 1$$

l'équation de la surface indicatrice, et par

$$lx + my + nz = 0,$$

l'équation du plan tangent, rapportées toutes deux au point considéré comme origine, l'équation générale des surfaces du second ordre passant par l'intersection de la surface indicatrice et de la sphère du rayon r décrite de l'origine comme centre, étant, comme l'on sait,

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy-1+k(x^2+y^2+z^2-r^2)=0,$$

on voit qu'il suffira d'identifier cette équation avec la suivante

$$(91) \quad . \quad . \quad . \quad (lx+my+nz)(l'x+m'y+n'z)=0,$$

ce qui conduira à éliminer les quatre arbitraires l', m', n' et k entre six équations, et par conséquent nous devrons obtenir finalement deux équations entre les coefficients l, m, n, A, B, ..., qui ne sont autre chose que les dérivées premières et secondes de φ, lesquelles équations, jointes à celle de la surface elle-même, détermineront complètement les points qui satisfont à la question.

La méthode et le but étant ainsi nettement indiqués, le calcul sera des plus simples. Ayant développé l'équation (91) ainsi qu'il suit,

$$\begin{gathered} ll'x^2 + mm'y^2 + nn'z^2 \\ + (mn' + nm')\,yz + (nl' + ln')\,zx + (lm' + ml')\,xy = 0, \end{gathered}$$

on voit qu'il suffira de poser :

$$(92).\quad \left\{ \begin{array}{ccc} A + k = ll', & B + k = mm', & C + k = nn', \\ 2D = mn' + nm', & 2E = nl' + ln', & 2F = lm' + ml', \\ & 1 + kr^2 = 0, & \end{array} \right.$$

lesquelles équations donnent par la première ligne

$$l' = \frac{A + k}{l}, \quad m' = \frac{B + k}{m}, \quad n' = \frac{C + k}{n},$$

et, en substituant dans la seconde ligne,

$$\left\{ \begin{aligned} 2D &= m\frac{C + k}{n} + n\frac{B + k}{m} = \frac{1}{mn}[m^2(C + k) + n^2(B + k)], \\ 2E &= n\frac{A + k}{l} + l\frac{C + k}{n} = \frac{1}{nl}[n^2(A + k) + l^2(C + k)], \\ 2F &= l\frac{B + k}{m} + m\frac{A + k}{l} = \frac{1}{lm}[l^2(B + k) + m^2(A + k)], \end{aligned} \right.$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$\left\{ \begin{aligned} 2Dmn &= m^2(C + k) + n^2(B + k), \\ 2Enl &= n^2(A + k) + l^2(C + k), \\ 2Flm &= l^2(B + k) + m^2(A + k), \end{aligned} \right.$$

ou encore :

$$\left\{\begin{aligned} k(m^2+n^2) &= 2Dmn - (m^2C + n^2B),\\ k(n^2+l^2) &= 2Enl - (n^2A + l^2C),\\ k(l^2+m^2) &= 2Flm - (l^2B + m^2A). \end{aligned}\right.$$

D'autre part r étant le rayon de l'indicatrice, c'est-à-dire étant donné par la formule (39) dans laquelle il faut prendre constamment le même signe pour un même point, d'après la définition même de l'ombilic, la dernière équation (92) se transformera de la façon suivante

$$1 + k\frac{R}{\Delta_1\varphi} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad k = -\frac{\Delta_1\varphi}{R}.$$

Nous aurons donc finalement, en égalant les différentes valeurs de k de ces quatre dernières équations,

$$\frac{m^2C + n^2B - 2Dmn}{m^2+n^2} = \frac{n^2A + l^2C - 2Enl}{n^2+l^2}$$
$$= \frac{l^2B + m^2A - 2Flm}{l^2+m^2} = \frac{\Delta_1\varphi}{R},$$

c'est-à-dire trois équations, dont les deux premières feront connaître les coordonnées des points cherchés, et la dernière la valeur du rayon de courbure correspondant.

Si nous récrivons maintenant ces équations en remettant à la place des lettres $l, m, n,$ A, B, ... les fonctions qu'elles étaient censées représenter, ces équations seront définitivement les suivantes,

$$(93).\left\{\begin{aligned} &\frac{\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2} + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2} - 2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}}{\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2} + \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2} - 2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx}}{\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2}\\ &\qquad = \frac{\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2} + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2} - 2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy}}{\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2} = \frac{\Delta_1\varphi}{R}, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles les trois premiers rapports correspondent chacun à l'un des axes coordonnés, et se changent par conséquent les uns dans les autres par la permutation de ces trois axes.

SECONDE MÉTHODE. — On arrivera au même résultat à l'aide de considérations purement analytiques, en exprimant que la valeur fournie par l'équation (5) pour le rayon de courbure d'une section normale est indépendante de la direction de cette section, c'est-à-dire des valeurs des cosinus a, b, c qui particularisent cette direction.

En effet, ces trois cosinus étant astreints à vérifier les deux équations (7) (paragraphe 1er), si l'on tirait de ces deux équations la valeur de deux d'entre eux, a et b, par exemple, en fonction du troisième c et que l'on reportât ces valeurs dans le second membre de l'équation (5), cette expression devrait alors, dans le cas actuel, se réduire à une constante; et par conséquent on obtiendrait les conditions cherchées en annulant séparément les coefficients de c^2 et de c^4, ce qui fournirait bien encore deux équations (voir l'errata qui, jointes à l'équation de la surface, détermineraient les coordonnées des points cherchés, et la constante qui subsisterait seule dans le second membre exprimerait la valeur de $\frac{\Delta_1 \varphi}{R}$, et donnerait par suite immédiatement la valeur du rayon de courbure correspondant.

Toutefois, nous ne suivrons pas à la lettre ce procédé qui aurait le grave inconvénient de détruire la symétrie entre les trois cosinus a, b, c et nécessiterait des calculs aussi mal aisés que peu élégants, et nous lui substituerons le suivant qui revient au même quant au fond, mais qui ne donne pas lieu au même reproche et conduit, au contraire, à des calculs simples et symétriques.

A cet effet, la méthode que nous venons d'indiquer, consistant en somme à éliminer deux des trois cosinus, soient a et b, entre les deux équations (7) et l'équation (5), et à annuler ensuite séparément les coefficients du troisième dans l'équation ainsi obtenue, nous observerons que pour faire cette élimination, il n'est pas nécessaire de résoudre les deux premières par rapport à a et b pour reporter leurs valeurs dans la troisième, ce qui compliquerait nos calculs de radicaux fort incommodes, mais qu'en imitant un procédé d'élimination connu, nous pouvons, dans les quatre équations suivantes

$$(94). \begin{cases} a^2+b^2+c^2-1=0, \\ a\left(a\frac{\varphi}{x}+b\frac{\varphi}{y}+c\frac{\varphi}{z}\right)=0, \qquad b\left(a\frac{\varphi}{x}+b\frac{\varphi}{y}+c\frac{\varphi}{z}\right)=0, \\ c\left(a\frac{\varphi}{x}+b\frac{\varphi}{y}+c\frac{\varphi}{z}\right)=0, \end{cases}$$

qui se confondent avec les deux équations (7), considérer séparément a^2, b^2, ab, ac comme quatre inconnues distinctes et éliminer ces quatre inconnues entre ces quatre équations qui sont alors *linéaires* par rapport à ces nouvelles inconnues, et l'équation (5) qui l'est également. Mais alors la variable c n'entrant plus au premier degré dans l'équation résultante que par le produit bc, il suffira évidemment d'annuler le coefficient du terme en c^2 et celui du terme en bc, pour que cette dernière équation devienne réellement indépendante de a, b, c sous la condition exprimée par les équations (7), c'est-à-dire, en d'autres termes, pour que l'expression $\frac{\Delta_1\varphi}{R}$ se réduise à une constante pour toutes les valeurs de a, b, c satisfaisant à ces équations (7).

En résumé, la présente méthode consiste donc à éliminer quatre des six inconnues a^2, b^2, c^2, bc, ca, ab entre les cinq équations (5) et (94), qui sont toutes *linéaires* par rapport à ces inconnues et à égaler ensuite à zéro les coefficients des deux autres inconnues dans l'équation résultante. On voit donc que le problème analytique en face duquel nous nous trouvons est identique à celui qui se présente lorsque l'on veut appliquer à un système matériel *à liaisons* le principe des *vitesses virtuelles*, et par conséquent nous pourrons, pour effectuer cette série d'opérations, employer la méthode si élégante des coefficients indéterminés de Lagrange.

Pour cela nous multiplierons les quatre équations (94) respectivement par quatre coefficients arbitraires que nous désignerons par h, $k\frac{\varphi}{x}$, $k'\frac{\varphi}{y}$, $k''\frac{\varphi}{z}$, et nous les ajouterons à l'équation (5), ce qui nous fournira l'équation suivante,

$$\frac{\Delta_1\varphi}{R} - F(a,b,c) + h(a^2+b^2+c^2-1)$$
$$+ ka\frac{\varphi}{x}\left(a\frac{\varphi}{x}+b\frac{\varphi}{y}+c\frac{\varphi}{z}\right) + k'b\frac{\varphi}{y}\left(a\frac{\varphi}{x}+b\frac{\varphi}{y}+c\frac{\varphi}{z}\right)$$
$$+ k''c\frac{\varphi}{z}\left(a\frac{\varphi}{x}+b\frac{\varphi}{y}+c\frac{\varphi}{z}\right) = 0,$$

ou, en développant, substituant à F (a,b,c) sa valeur (2), et ordonnant par rapport à a, b, c :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\Delta_1\varphi}{R} - h + a^2\left[h+k\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2-\frac{\varphi^2}{x^2}\right] + b^2\left[h+k'\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2-\frac{\varphi^2}{y^2}\right] + c^2\left[h+k''\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2-\frac{\varphi^2}{z^2}\right]\\
&+ bc\left[k'\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}+k''\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{y}-2\frac{\varphi^2}{yz}\right] + ca\left[k''\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}+k\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}-2\frac{\varphi^2}{zx}\right]\\
&\qquad + ab\left[k\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}+k'\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{x}-2\frac{\varphi^2}{xy}\right] = 0,
\end{aligned}\right.$$

et ensuite nous écrirons que l'on a séparément

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\Delta_1\varphi}{R} - h = 0,\\
&h+k\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2-\frac{\varphi^2}{x^2}=0,\quad h+k'\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2-\frac{\varphi^2}{y^2}=0,\quad h+k''\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2-\frac{\varphi^2}{z^2}=0,\\
&(k'+k'')\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}-2\frac{\varphi^2}{yz}=0,\quad (k''+k)\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}-2\frac{\varphi^2}{zx}=0,\quad (k+k')\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}-2\frac{\varphi^2}{xy}=0;
\end{aligned}\right.$$

d'où, en éliminant h entre les quatre premières équations, et récrivant les trois autres :

$$(95).\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\Delta_1\varphi}{R} = \frac{\varphi^2}{x^2}-k\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 = \frac{\varphi^2}{y^2}-k'\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 = \frac{\varphi^2}{z^2}-k''\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2,\\
&(k'+k'')\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z} = 2\frac{\varphi^2}{yz},\quad (k''+k)\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x} = 2\frac{\varphi^2}{zx},\quad (k+k') = 2\frac{\varphi^2}{xy}
\end{aligned}\right.$$

Les deux dernières expressions de $\frac{\Delta_1\varphi}{R}$ nous donneront maintenant

$$\frac{\Delta_1\varphi}{R}\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2=\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}-k''\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2,\quad \frac{\Delta_1\varphi}{R}\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2=\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}-k'\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2;$$

d'où, en ajoutant, et ayant égard ensuite aux équations de la seconde ligne du groupe précédent (95)

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_1\varphi}{R}\left[\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]&=\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}-(k'+k'')\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2\\&=\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}-2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz};\end{aligned}$$

et nous tirerons de là par conséquent la première des trois équations suivantes

$$\frac{\Delta_1\varphi}{R}=\frac{\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}-2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}}{\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}+\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}-2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx}}{\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2}=\frac{\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}-2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy}}{\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2};$$

les deux autres résultant évidemment de ce que dans chacune des deux lignes d'équations (95) les trois équations se permutent entre elles, lorsque l'on permute simultanément les trois lettres x, y, z et les trois lettres k, k', k'', opération qui a simplement pour effet d'échanger entre eux les trois derniers rapports que nous venons d'écrire, ainsi que nous l'avons déjà remarqué; et l'on retrouve ainsi les équations déjà obtenues par la méthode précédente.

Troisième méthode. — Au lieu de partir de la considération du rayon de courbure des sections normales et d'exprimer qu'il est indépendant de la direction de la section, nous pouvons encore considérer les sections principales et exprimer qu'elles sont indéterminées, car il n'y a plus évidemment dans ce cas ni rayons principaux, ni sections principales, toutes les sections normales étant pareilles au point de vue de la courbure, et jouant par conséquent un rôle identique.

Pour cela il suffit évidemment d'exprimer que les trois équations qui déterminent la valeur des trois cosinus a, b, c correspondant aux sections principales se réduisent dans ce cas à deux seulement. Or, nous avons établi dans le paragraphe II que ces trois cosinus devaient satisfaire, pour les sections principales, en outre des équations (7), aux équations (9) ou (12), et nous avons eu soin de faire remarquer qu'il n'y avait pas en cela surabondance dans les conditions imposées, attendu que ces cinq équations considérées simultanément se réduisaient à trois distinctes seulement. Il suffira donc, dans le cas actuel, d'exprimer que la première des équations (7) se confond avec l'une des équations (9) ou (12), ce qui fournira encore deux équations à joindre à l'équation de la surface pour déterminer les coordonnées des points cherchés.

En considérant la première (12), par exemple, les conditions ainsi obtenues seront

$$\frac{\frac{\lambda}{x} - \frac{1}{R}}{\frac{\varphi}{x}} = \frac{\frac{\lambda}{y}}{\frac{\varphi}{y}} = \frac{\frac{\lambda}{z}}{\frac{\varphi}{z}},$$

ou, en chassant les dénominateurs, et remplaçant $\frac{1}{R}$ par sa valeur $\frac{1}{2}$ H à cause de l'égalité de tous les rayons de courbure,

$$(96).\quad . \quad . \quad \frac{\varphi}{y}\frac{\lambda}{x} - \frac{\varphi}{x}\frac{\lambda}{y} = \frac{1}{2}\frac{\varphi}{y}\,H, \qquad \frac{\varphi}{z}\frac{\lambda}{x} - \frac{\varphi}{x}\frac{\lambda}{z} = \frac{1}{2}\frac{\varphi}{z}\,H,$$

équations dans lesquelles il n'y a plus qu'à remplacer les dérivées $\frac{\lambda}{x}, \frac{\lambda}{y}, \frac{\lambda}{z}$, et H par leurs valeurs (25) et (28), pour obtenir les équations cherchées.

Or, si nous observons que les expressions de ces dérivées, étant multipliées et divisées par $\Delta_1^2\varphi$, peuvent être mises sous la forme

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\lambda}{x}=\frac{1}{\Delta_1^3\varphi}\left(\Delta_1^2\varphi\,\frac{\varphi^2}{x^2}-\frac{\varphi}{x}\,\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi}{x}\right),\quad \frac{\lambda}{y}=\frac{1}{\Delta_1^3\varphi}\left(\Delta_1^2\varphi\,\frac{\varphi^2}{xy}-\frac{\varphi}{x}\,\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi}{y}\right),\\ &\frac{\lambda}{z}=\frac{1}{\Delta_1^3\varphi}\left(\Delta_1^2\varphi\,\frac{\varphi^2}{xz}-\frac{\varphi}{x}\,\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi}{z}\right),\end{aligned}\right.$$

et, si nous substituons ces dernières expressions ainsi que la valeur (28) de H dans la première des équations précédentes (96), elle deviendra, en la multipliant par $2\Delta_1^3\varphi$,

$$2\left[\frac{\varphi}{y}\left(\Delta_1^2\varphi\,\frac{\varphi^2}{x^2}-\frac{\varphi}{x}\,\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi}{x}\right)-\frac{\varphi}{x}\left(\Delta_1^2\varphi\,\frac{\varphi^2}{xy}-\frac{\varphi}{x}\,\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi}{y}\right)\right]=\frac{\varphi}{y}\left[\Delta_1^2\varphi\Delta_2\varphi-F\left(\frac{\varphi}{x},\frac{\varphi}{y},\frac{\varphi}{z}\right)\right];$$

ou, en faisant passer tous les termes dans le premier membre,

$$\begin{aligned}&\frac{\varphi}{y}\left[F\left(\frac{\varphi}{x},\frac{\varphi}{y},\frac{\varphi}{z}\right)-\Delta_1^2\varphi\Delta_2\varphi+2\,\Delta_1^2\varphi\,\frac{\varphi^2}{x^2}-2\frac{\varphi}{x}\,\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi}{x}\right]\\ &\qquad-2\frac{\varphi}{x}\Delta_1^2\varphi\,\frac{\varphi^2}{xy}+2\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\frac{1}{2}\Delta_1^2\varphi}{y}=0;\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en remplaçant maintenant les symboles F, Δ_1, Δ_2, et leurs dérivées, par leurs significations définies au paragraphe I :

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\varphi}{y}\left\{\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}+2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}+2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx}+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy}\right.\\ &\quad-\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]\left(\frac{\varphi^2}{x^2}+\frac{\varphi^2}{y^2}+\frac{\varphi^2}{z^2}\right)+2\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]\frac{\varphi^2}{x^2}\\ &\qquad\left.-2\frac{\varphi}{x}\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{x^2}+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{yx}+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{zx}\right)\right\}\\ &\quad-2\frac{\varphi}{x}\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]\frac{\varphi^2}{xy}+2\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{xy}+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{y^2}+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{zy}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Or, si l'on développe cette équation en l'ordonnant pour plus de clarté par rapport aux dérivées secondes, on obtient simplement après réduction

$$(97).\left\{\begin{aligned}&\frac{\varphi}{y}\left[\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]\frac{\varphi^2}{x^2}+\frac{\varphi}{y}\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2-\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]\frac{\varphi^2}{y^2}-\frac{\varphi}{y}\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\right)\right]\frac{\varphi^2}{z^2}\\&+2\frac{\varphi}{z}\left[\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\right]\frac{\varphi^2}{yz}-2\frac{\varphi}{x}\left[\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]\frac{\varphi^2}{xy}=0,\end{aligned}\right.$$

et, si l'on multiplie maintenant tous les termes de cette dernière équation par $\frac{\varphi}{y}$, et que l'on ajoute et retranche pour la symétrie le terme $\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}$, on pourra l'écrire en mettant en évidence les facteurs communs :

$$(98).\left\{\begin{aligned}&\left[\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}-2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy}\right]\\&=\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}-2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}\right],\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui est la même chose :

$$\frac{\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}-2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}}{\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2}=\frac{\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}-2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy}}{\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2}.$$

Pour savoir à présent ce que deviendrait, étant traitée de la même façon, la seconde équation (96), il n'est pas nécessaire de recommencer des calculs analogues, il suffit d'observer qu'elle se déduit de la première par la simple permutation des deux lettres y et z sans toucher à la lettre x, ce qui donne en effectuant ce changement dans le résultat que nous venons d'obtenir :

$$\frac{\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}-2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{zy}}{\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2}=\frac{\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}-2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xz}}{\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2}.$$

Or, il suffit de regarder ces deux dernières équations pour voir qu'elles ne sont autres que les deux premières équations (93), dans lesquelles l'ordre seul des termes a reçu certaine modification.

Enfin, bien que nous ayons déjà la valeur de R par la formule $R = \frac{1}{2} H$, et la valeur générale de H (28) ou (31), ainsi que nous l'avons déjà rappelé tout à l'heure, si l'on veut retrouver pour l'expression de ce rayon la forme qui résulte de la dernière des équations (93), il suffira, les deux premières étant établies par le calcul qui précède, d'ajouter ensemble tous les numérateurs et de diviser par la somme des dénominateurs des trois premiers rapports; on obtiendra ainsi un rapport égal à chacun d'eux, qui sera le suivant

$$(98^{bis})\left\{\begin{aligned}&\frac{\left[\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]\frac{\varphi^2}{x^2}+\left[\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\right]\frac{\varphi^2}{y^2}+\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\right]\frac{\varphi^2}{z^2}-2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}-2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx}-2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy}}{2\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]}\\&=\frac{\Delta_1^2\varphi\Delta_2\varphi-F\left(\frac{\varphi}{x},\frac{\varphi}{y},\frac{\varphi}{z}\right)}{2\Delta_1^2\varphi}=\Delta_1\varphi\cdot\frac{1}{2}H=\frac{\Delta_1\varphi}{R},\end{aligned}\right.$$

en vertu de la formule (28) déjà rappelée, et, par conséquent, l'on retrouve bien encore par cette voie les trois équations (93), que nous avions déjà obtenues.

Quatrième méthode. — Une dernière méthode, enfin, consiste à exprimer l'égalité en grandeur et en signe du rayon de courbure de toutes les sections normales, en posant simplement la condition d'égalité des racines de l'équation (16) qui fournit les deux rayons principaux dans le cas général, car il est évident d'après la formule (23), que si R′ et R″ deviennent égaux, R sera constamment égal à leur valeur commune. C'est la méthode à laquelle nous avons déjà eu recours dans le paragraphe III pour traiter ce problème dans le cas de l'ellipsoïde, mais en profitant alors des simplifications très grandes dues à la forme particulière de l'équation de la surface.

Mais nous devons dire tout de suite qu'à notre avis cette dernière méthode présente une infériorité réelle au point de vue didactique, et surtout envisagée comme méthode d'investigation, par rapport à celles que nous venons d'exposer jusqu'ici, en ce qu'elle ne permet pas d'apercevoir *à priori* comme les méthodes précédentes à quel genre de solution on devra arriver; car tandis que ces dernières faisaient voir avant tout calcul que l'on devait obtenir *deux* équations entre les coordonnées des points cherchés, à joindre à l'équation de la surface, et que par conséquent la solution consistait en général en une série de points isolés, la méthode qu'il nous reste à faire connaitre ne fournit tout d'abord qu'*une seule* équation, qu'aucune considération intuitive ne fait supposer devoir se décomposer en deux équations distinctes, en sorte qu'il semble, avant d'avoir achevé le calcul, que l'on doive arriver à une *ligne* tracée sur la surface, et non à une série de points, comme cela a lieu en réalité. — Néanmoins, comme cette méthode se présente très naturellement à l'esprit, dès que l'on se rappelle la notion si simple et si lumineuse de l'indicatrice, et qu'il est d'usage d'y avoir recours dans la théorie classique, que nous nous sommes proposé de refaire, nous croyons devoir la développer ici également, afin de bien montrer que, malgré la multiplication du nombre des termes, on peut traiter, en conservant la symétrie des trois variables, absolument toutes les mêmes questions qu'en la détruisant, comme on le fait dans les formules usuelles; et la complication indiscutable de la formule que nous allons établir, nous servira de dernier argument et de meilleure preuve en faveur de la thèse que nous avons soutenue dans tout le cours de ce travail, à savoir le très grand parti que l'on peut tirer de la symétrie dans toute cette théorie, lorsque l'on a appris dès le début à s'en servir.

Cette formule, sur laquelle repose tout entière la méthode que nous venons d'indiquer, consiste dans l'égalité

$$(99).\left\{\begin{aligned} & a'\,b'\,c'\left(\frac{\varphi}{x}\,\frac{\varphi}{y}\,\frac{\varphi}{z}\right)^2 \Delta_1{}^6\varphi\,(\mathrm{H}^2 - 4\,\mathrm{K}) \\ & = \left(a'\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2 (bc'-cb')^2 + \left(b'\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\right)^2 (ca'-ac')^2 + \left(c'\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\right)^2 (ab'-ba')^2, \end{aligned}\right.$$

laquelle devient une *identité*, lorsque l'on y remplace $\Delta_1\varphi$ par sa valeur connue, H et K par leurs valeurs (31), et a, b, c, a', b', c' respectivement par les expressions suivantes, que ces lettres seront censées représenter désormais :

$$(100).\quad \left\{\begin{aligned} a &= \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 \frac{\varphi^2}{z^2} + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2 \frac{\varphi^2}{y^2} - 2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}, \\ b &= \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2 \frac{\varphi^2}{x^2} + \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 \frac{\varphi^2}{z^2} - 2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx}, \\ c &= \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 \frac{\varphi^2}{y^2} + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 \frac{\varphi^2}{x^2} - 2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy}; \end{aligned}\right.$$

$$(101).\quad a' = \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2, \quad b' = \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2, \quad c' = \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2.$$

Pour établir cette identité, nous partirons de la considération du second nombre de l'égalité (99), en posant

$$(102)\ \Delta = \left(a'\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2 (bc'-cb')^2 + \left(b'\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\right)^2 (ca'-ac')^2 + \left(c'\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\right)^2 (ab'-ba')^2,$$

et nous le transformerons de manière à arriver au premier membre de la même égalité, en y faisant apparaître successivement les trois facteurs $a'b'c'$, $\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2$, et $\Delta_1^6\varphi\,(\mathrm{H}^2 - 4\mathrm{K})$ qui composent ce premier membre.

Pour cela, nous écrirons d'abord Δ, de la façon suivante :

$$\Delta = \left(\frac{\varphi}{z}\cdot c'a'b\frac{\varphi}{y} - \frac{\varphi}{y}\cdot a'b'c\frac{\varphi}{z}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{x}\cdot a'b'c\frac{\varphi}{z} - \frac{\varphi}{z}\cdot b'c'a\frac{\varphi}{x}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{\varphi}{y}\cdot b'c'a\frac{\varphi}{x} - \frac{\varphi}{x}\cdot c'a'b\frac{\varphi}{y}\right)^2,$$

et nous le mettrons, par une transformation connue sous la forme

$$(103).\quad \ldots\ldots\ldots \quad \Delta = \mathrm{S} - \mathrm{T},$$

en posant pour la commodité du calcul :

$$(104).\quad S=\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]\left[\left(b'c'a\frac{\varphi}{x}\right)^2+\left(c'a'b\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(a'b'c\frac{\varphi}{z}\right)^2\right],$$

$$(105).\quad T=\left[b'c'a\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+c'a'b\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+a'b'c\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]^2.$$

Cela posé, nous ferons apparaître dans Δ le facteur $a'b'c'$, en opérant ainsi qu'il suit.

Si l'on fait attention que les expressions (101) de a', b', c', donnent lieu aux égalités suivantes

$$(106).\quad \left\{\begin{aligned}
&a'=\Delta_1^2\varphi-\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2,\qquad b'=\Delta_1^2\varphi-\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2,\qquad c'=\Delta_1^2\varphi-\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2,\\
&b'+c'=a'+2\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2,\quad c'+a'=b'+2\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2,\quad a'+b'=c'+2\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2,\\
&\qquad\qquad a'+b'+c'=2\,\Delta_1^2\varphi,\\
&b'c'=\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2+\Delta_1^2\varphi\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2,\qquad c'a'=\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\right)^2+\Delta_1^2\varphi\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2,\\
&\qquad\qquad\qquad a'b'=\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\right)^2+\Delta_1^2\varphi\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2,
\end{aligned}\right.$$

on voit que l'expression ci-dessus de S (104), multipliée par 2, peut être transformée de la façon suivante

$$\begin{aligned}
2S&=(a'+b'+c')\left[b'c'.\,b'c'\left(a\frac{\varphi}{x}\right)^2+c'a'.\,c'a'\left(b\frac{\varphi}{y}\right)^2+a'b'.\,a'b'\left(c\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]\\
&=a'b'c'\left[b'c'\left(a\frac{\varphi}{x}\right)^2+c'a'\left(b\frac{\varphi}{y}\right)^2+a'b'\left(c\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]\\
&+\left[a'+2\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\right]\left[b'c'.\,b'c'\left(a\frac{\varphi}{x}\right)^2\right]+\left[b'+2\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\right]\left[c'a'.\,c'a'\left(b\frac{\varphi}{y}\right)^2\right]\\
&+\left[c'+2\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]\left[a'b'.\,a'b'\left(c\frac{\varphi}{z}\right)^2\right],
\end{aligned}$$

en ayant égard à la troisième égalité (106), puis pour effectuer le produit prenant d'abord tous les termes de ce produit qui font apparaître le facteur $a'b'c'$, et remplaçant dans les autres termes les facteurs $(b' + c')$, $(c' + a')$, $(a' + b')$, par leurs valeurs respectives (106). En effectuant maintenant les produits partiels dans la dernière égalité qui précède, on voit que le facteur 2 se montre partout, et nous aurons simplement

$$(107). \quad \ldots\ldots \quad S = U + V,$$

en supprimant ce facteur et posant encore, pour faciliter les transformations,

$$(108). \quad \left\{ \begin{aligned} U &= a'b'c'\left[b'c'\left(a\frac{\varphi}{x}\right)^2 + c'a'\left(b\frac{\varphi}{y}\right)^2 + a'b'\left(c\frac{\varphi}{z}\right)^2 \right] \\ V &= \left[b'c'a\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\right]^2 + \left[c'a'b\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\right]^2 + \left[a'b'c\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]^2, \end{aligned} \right.$$

et la valeur (103) de Δ deviendra :

$$(109). \quad \ldots \quad \Delta = U + V - T = U - (T - V).$$

Or d'une part, l'expression de U qui précède peut s'écrire, en substituant aux produits $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$, leurs valeurs (106),

$$(110) \left\{ \begin{aligned} U = a'b'c'\Bigg[&\left\{\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2 + \Delta_1^2\varphi\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\right\}\left(a\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \left\{\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \Delta_1^2\varphi\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\right\}\left(b\frac{\varphi}{y}\right)^2 \\ &+ \left\{\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\right)^2 + \Delta_1^2\varphi\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\left(c\frac{\varphi}{z}\right)^2\right\}\Bigg] \\ = a'b'c'\Bigg[&\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2(a^2+b^2+c^2) + \Delta_1^2\varphi\left\{a^2\left(\frac{\varphi}{x}\right)^4 + b^2\left(\frac{\varphi}{y}\right)^4 + c^2\left(\frac{\varphi}{z}\right)^4\right\}\Bigg], \end{aligned} \right.$$

et d'autre part, les expressions (105) et (108) de T et de V donnent immédiatement

$$\begin{aligned} T - V &= 2\left[c'a'b\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 \cdot a'b'c\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2 + a'b'c\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2 \cdot b'c'a\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + b'c'a\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 \cdot c'a'b\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 \right] \\ &= 2\,a'b'c'\left[a'\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2 bc + b'\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\right)^2 ca + c'\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\right)^2 ab \right], \end{aligned}$$

ou, en remplaçant dans la parenthèse du dernier membre a', b', c', par leurs valeurs (106),

$$\mathrm{T}-\mathrm{V}=2a'b'c'\left[\left\{\Delta_1^2\varphi-\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\right\}\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2 bc\right.$$

$$\left.+\left\{\Delta_1^2\varphi-\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\right\}\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\right)^2 ca+\left\{\Delta_1^2\varphi-\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right\}\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\right)^2 ab\right]$$

$$=2a'b'c'\left[\Delta_1^2\varphi\left\{\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2 bc+\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\right)^2 ca+\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\right)^2 ab\right\}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2(bc+ca+ab)\right],$$

de telle sorte, qu'en substituant cette dernière valeur de $\mathrm{T}-\mathrm{V}$ en même temps que la seconde valeur de U (110) dans la seconde expression (109) de Δ, on voit qu'elle pourra s'écrire

$$(111).\quad \Delta=a'b'c'\left[\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2(a+b+c)^2-\Delta_1^2\varphi\cdot\mathcal{H}\right],$$

en posant de nouveau

$$\mathcal{H}=2bc\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2+2ca\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\right)^2+2ab\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\right)^2-a^2\left(\frac{\varphi}{x}\right)^4-b^2\left(\frac{\varphi}{y}\right)^4-c^2\left(\frac{\varphi}{z}\right)^4;$$

et, sous cette forme, le facteur $a'b'c'$ étant mis en évidence, on voit que pour faire apparaître de même le facteur $\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2$, qui figure déjà dans le premier terme de la parenthèse, il suffira de la faire apparaître dans l'expression de $\mathcal{H}$.

Pour cela nous écrirons, comme il suit, cette expression

$$(112)\left\{\begin{aligned}\mathcal{H}=a\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\left[b\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+c\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2-a\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\right]+b\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\left[c\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2+a\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2-b\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\right]&\\+c\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\left[a\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+b\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2-c\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]&,\end{aligned}\right.$$

en la composant ainsi de trois termes qui se déduisent les uns des autres par permutation circulaire : il suffira donc d'en calculèr un seul. Or, en se reportant aux expressions (100), il est facile de voir qu'elles donnent lieu aux égalités suivantes :

$$(113)\left\{\begin{aligned}
&a\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+b\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+c\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2=2\left[\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}+\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{y^2}+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{zx}+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\right)\right],\\
&a\frac{\varphi^2}{x^2}+b\frac{\varphi^2}{y^2}+c\frac{\varphi^2}{z^2}=2\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}+\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{x^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{x^2}-\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{y^2}-\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy}\right],\\
&a\left(\frac{\varphi}{x}\right)^3\frac{\varphi^2}{yz}+b\left(\frac{\varphi}{y}\right)^3\frac{\varphi^2}{zx}+c\left(\frac{\varphi}{z}\right)^3\frac{\varphi^2}{xy}=\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz}\left[\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}+\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}\right]\\
&+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{zx}\left[\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}+\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}\right]+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\left[\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}\right]\\
&-2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\left[\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2\right].
\end{aligned}\right.$$

On trouverait de même sans peine, en retranchant de la première de ces dernières égalités, la première des égalités (100) multipliée par $2\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2$,

$$b\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+c\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2-a\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2$$

$$=2\left[\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}-\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz}+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{zx}+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\right)+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\cdot\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz}\right];$$

de sorte que, si nous posons encore une fois pour abréger,

$$(114)\quad\ldots\quad \mathfrak{S}=\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz}+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{zx}+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy},$$

nous aurons par permutation circulaire les trois égalités,

$$\left\{\begin{aligned}
&b\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+c\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2-a\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2=2\left[\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}-\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\mathfrak{S}+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\cdot\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz}\right]\\
&c\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2+a\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2-b\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2=2\left[\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}-\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\mathfrak{S}+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\cdot\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{zx}\right]\\
&a\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+b\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+c\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2=2\left[\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}-\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\mathfrak{S}+2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\cdot\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\right],
\end{aligned}\right.$$

puisque, l'expression (114) des $\mathfrak{S}$ restant invariable dans ce changement, les trois quantités a, b, c, c'est-à-dire les expressions (100) se déduisent elles-mêmes les unes des autres suivant cette loi.

Si nous multiplions maintenant ces trois dernières égalités respectivement par $a\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2$, $b\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2$, $c\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2$, et que nous ajoutions, nous obtiendrons alors pour la quantité $\mathcal{K}$, en vertu de la valeur (112), l'expression suivante :

$$(115)\quad \mathcal{K}=2\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2\left(a\frac{\varphi^2}{x^2}+b\frac{\varphi^2}{y^2}+c\frac{\varphi^2}{z^2}\right)-2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\cdot\mathfrak{T},$$

en posant une dernière fois

$$\mathfrak{T}=\mathfrak{S}\left[a\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2+b\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+c\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]-2\left[a\left(\frac{\varphi}{x}\right)^3\frac{\varphi^2}{yz}+b\left(\frac{\varphi}{y}\right)^3\frac{\varphi^2}{zx}+c\left(\frac{\varphi}{z}\right)^3\frac{\varphi^2}{xy}\right].$$

Or, si nous avons égard maintenant à la première et à la troisième des égalités (113), ainsi qu'à la valeur (114) de $\mathfrak{S}$, cette dernière expression de $\mathfrak{T}$ deviendra :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}=2\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz}+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{zx}+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\right)&\left[\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}+\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}\right]\\
&-2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz}+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{zx}+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2\\
&-2\left[\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz}\left\{\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}+\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}\right\}\right.\\
&\quad+\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{zx}\left\{\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}+\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}\right\}\\
&\quad\left.+\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\left\{\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}\right\}\right]\\
&+4\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\left[\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Or, sous cette forme, il est facile de voir qu'en effectuant les produits, chacun des termes de la première ligne détruira un terme identique dans les troisième, quatrième et cinquième lignes, de manière que ces termes disparaitront entièrement du résultat; et de même que les termes de la seconde ligne se réduiront avec d'autres termes semblables de la dernière ligne, mais sans disparaître cette fois, à cause de la différence des coefficients numériques: en sorte qu'il restera simplement, en mettant en évidence les facteurs communs,

$$\mathfrak{T} = 2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\left[\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{x^2} + \frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{y^2} + \frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy}\frac{\varphi^2}{z^2}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2 - 2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{xy} - 2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{xy}\frac{\varphi^2}{yz} - 2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{zx}\right].$$

Si nous substituons maintenant cette valeur dans l'expression (115) de $\mathcal{H}$, et que nous ayons égard en même temps à la deuxième des égalités (113), cette expression deviendra

$$\mathcal{H} = 4\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2} + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{x^2} + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2} - \frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{x^2} - \frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{y^2} - \frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy}\frac{\varphi^2}{z^2}\right.$$
$$- \frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{x^2} - \frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{y^2} - \frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy}\frac{\varphi^2}{z^2} - \left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2 - \left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2 - \left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2$$
$$\left. + 2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{xy} + 2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{xy}\frac{\varphi^2}{yz} + 2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{zx}\right];$$

ou, en réduisant et ordonnant par rapport aux dérivées premières $\frac{\varphi}{x}$, $\frac{\varphi}{y}$, $\frac{\varphi}{z}$,

$$\mathcal{H} = 4\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\left\{\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2} - \left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2\right\} + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\left\{\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{x^2} - \left(\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2\right\} + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\left\{\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2} - \left(\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2\right\}\right.$$
$$\left. + 2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\left(\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx} - \frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{x^2}\right) + 2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\left(\frac{\varphi^2}{zy}\frac{\varphi^2}{xy} - \frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{y^2}\right) + 2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\left(\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{yz} - \frac{\varphi^2}{xy}\frac{\varphi^2}{z^2}\right)\right];$$

c'est-à-dire que l'on aura simplement, en se reportant à la seconde formule (31) :

$$\mathcal{H} = 4\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2(\mathrm{K}\Delta_1^4\varphi).$$

Si nous substituons enfin cette dernière valeur dans l'expression (111) obtenue plus haut pour Δ, en ayant égard, en outre, à l'égalité déjà signalée à propos des équations (98^{bis}), savoir

$$(116) \quad . \ . \quad a + b + c = \Delta_1^2\varphi\Delta_2\varphi - F\left(\frac{\varphi}{x}, \frac{\varphi}{y}, \frac{\varphi}{z}\right) = H\Delta_1^3\varphi,$$

nous aurons définitivement,

$$\Delta = a'b'c'\left(\frac{\varphi}{x}\,\frac{\varphi}{y}\,\frac{\varphi}{z}\right)^2\left[(H\Delta_1^3\varphi)^2 - 4\Delta_1^2\varphi\,(K\Delta_1^4\varphi)\right],$$

ou, si l'on aime mieux,

$$\Delta = a'b'c'\left(\frac{\varphi}{x}\,\frac{\varphi}{y}\,\frac{\varphi}{z}\right)^2\Delta_1^6\varphi\,(H^2 - 4K),$$

et l'égalité de cette valeur transformée de Δ, avec sa valeur de définition (102), d'où nous étions partis, constituera précisément l'identité (99) que nous nous proposions d'établir.

Avant de déduire de cette formule les conséquences immédiates qu'elle comporte pour la recherche des ombilics, nous demanderons au lecteur de nous permettre une courte digression, et nous nous arrêterons un instant en vue de répondre à une préoccupation qui peut naître dans son esprit. La méthode à l'aide de laquelle nous venons d'établir cette formule consistant en une simple vérification, c'est-à-dire étant essentiellement un procédé de démonstration et nullement un procédé d'invention, on pourra nous demander, à défaut d'une méthode réelle d'investigation, d'indiquer ou une série logique d'inductions, ou tout au moins une méthode de tâtonnements rationnels, propres à mettre sur la voie d'une formule aussi compliquée, sauf à recourir ensuite à une vérification nécessaire.

Le procédé qui se présente le plus naturellement à l'esprit, à savoir celui qui consisterait à partir de l'identité correspondante dans la théorie classique, et à y substituer les valeurs des dérivées p, q, r, s, t, déduites du théorème des fonctions implicites, suffisant à la rigueur (quoique pénible et fastidieux) pour retrouver toutes les formules que nous avons données jusqu'ici, ne saurait conduire au but dans le cas actuel, parce que la symétrie ayant été rompue à l'origine du calcul, la complication de la formule est trop grande pour qu'il soit possible d'apercevoir le moyen de la rétablir à l'aide de simples transformations algébriques. Mais de même que la symétrie a seule pu nous permettre de conduire à bonne fin la vérification laborieuse de cette formule, elle seule peut encore nous fournir une indication logique qui nous mette sur la voie pour la trouver.

En effet, connaissant par les méthodes exposées précédemment le résultat auquel nous devons arriver pour la recherche des ombilics, et qui consiste dans les équations suivantes

$$(117) \quad \ldots\ldots \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{H\Delta_1^3\varphi}{2\Delta_1^2\varphi},$$

lesquelles se réduisent à deux seulement, ainsi que nous l'avons fait remarquer, on voit que dans la méthode que nous traitons actuellement, le discriminant $H^2 - 4K$ devra se réduire à une somme de carrés contenant en facteurs au moins deux termes de l'une ou l'autre des deux séries suivantes

$$\begin{array}{ccc} bc' - cb', & ca' - ac', & ab' - ba', \\ a'H\Delta_1^3\varphi - 2a\Delta_1^2\varphi, & b'H\Delta_1^3\varphi - 2b\Delta_1^2\varphi, & c'H\Delta_1^3\varphi - 2c\Delta_1^2\varphi, \end{array}$$

ou tout autres combinaisons analogues des équations qui précèdent, mais celles-ci étant évidemment les plus simples, il convient de porter de prime abord son attention sur elles. Mais alors la symétrie exige que dans chacune de ces séries les trois termes qui la composent interviennent également, de sorte que l'on se trouve conduit à essayer, pour le discriminant $H^2 - 4K$, l'une des formes

$$(118). \left\{ \begin{array}{l} A\,(bc' - cb')^2 + B\,(ca' - ac')^2 + C\,(ab' - ba')^2, \\ A\,(a'H\Delta_1^3\varphi - 2a\Delta_1^2\varphi)^2 + B\,(b'H\Delta_1^3\varphi - 2b\Delta_1^2\varphi)^2 + C\,(c'H\Delta_1^3\varphi - 2c\Delta_1^2\varphi)^2, \end{array} \right.$$

ou encore

$$(119).\left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}(bc' - cb')^2 + \mathrm{B}(ca' - ac')^2 + \mathrm{C}(ab' - ba')^2 \\ &+ \mathrm{D}(a'\mathrm{H}\Delta_1^3\varphi - 2a\Delta_1^2\varphi)^2 + \mathrm{E}(b'\mathrm{H}\Delta_1^3\varphi - 2b\Delta_1^2\varphi)^2 + \mathrm{F}(c'\mathrm{H}\Delta_1^3\varphi - 2c\Delta_1^2\varphi)^2,\end{aligned}\right.$$

qui toutes, dans l'hypothèse des coefficients A, B, ... de même signe, conduiraient également aux seules équations (117).

On voit, de plus, qu'il faut pour cela que les coefficients ne dépendent pas de la courbure, c'est-à-dire ne contiennent pas les dérivées du second ordre de φ; car, sans cela, du moment qu'on satisferait en les annulant à l'équation $\mathrm{H}^2 - 4\mathrm{K} = 0$, l'on trouverait de cette façon pour déterminer les points cherchés des équations distinctes des équations (117). Ils pourront, au contraire, contenir les dérivées premières, parce qu'alors les équations obtenues en les annulant exprimeraient une propriété relative à la normale ou au plan tangent et non à la courbure, et, par conséquent, ne sauraient fournir de solutions pour la recherche des ombilics, lesquels, *à priori*, ne peuvent évidemment être caractérisés que par des équations où figurent les dérivées du second ordre; et, en conséquence, il n'y a rien dans cette dernière hypothèse qui implique contradiction avec le résultat connu auquel on doit parvenir en définitive, c'est-à-dire avec les équations (117).

La question étant ainsi posée parmi les deux premières formes de développement (118), c'est assurément la seconde qui offre *à priori*, sinon la plus grande probabilité, du moins la plus grande facilité pour vérifier si, oui ou non, elle est applicable à l'équation $\mathrm{H}^2 - 4\mathrm{K} = 0$; aussi est-ce celle-là qu'il convient d'essayer tout d'abord.

En effet, cette équation devant s'écrire, si l'on veut chasser les dénominateurs pour n'avoir affaire qu'à des polynômes entiers

$$(120). \quad . \quad . \quad \Delta_1^6\varphi\,(\mathrm{H}^2 - 4\mathrm{K}) = (\mathrm{H}\Delta_1^3\varphi)^2 - 4\Delta_1^2\varphi\,(\mathrm{K}\Delta_1^4\varphi) = 0,$$

on aperçoit de suite une analogie très grande entre cette forme et la seconde (118), qui en développant peut s'écrire ainsi

$$\begin{gathered}(\mathrm{A}a'^2 + \mathrm{B}b'^2 + \mathrm{C}c'^2)\,(\mathrm{H}\Delta_1^3\varphi)^2 \\ - 4\Delta_1^2\varphi\left[(\mathrm{A}aa' + \mathrm{B}bb' + \mathrm{C}cc')\,\mathrm{H}\Delta_1^3\varphi - \Delta_1^2\varphi\,(\mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}b^2 + \mathrm{C}c^2)\right];\end{gathered}$$

et l'on voit alors qu'on obtiendra l'identité cherchée, si l'on peut satisfaire, par des valeurs de A, B, C remplissant les conditions indiquées tout à l'heure, aux deux équations suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}a'^2 + \mathrm{B}b'^2 + \mathrm{C}c'^2 = 1, \\ &(\mathrm{A}aa' + \mathrm{B}bb' + \mathrm{C}cc')\,\mathrm{H}\Delta_1^3\varphi - \Delta_1^2\varphi\,(\mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}b^2 + \mathrm{C}c^2) = \mathrm{K}\Delta_1^4\varphi, \end{aligned}\right.$$

problème dont il est évidemment plus facile de reconnaitre la possibilité que pour l'identification de la première forme (118), à cause de la complication moins grande des termes du développement.

Dans ce but, nous considérerons d'abord la seconde de ces deux dernières équations, qui seule renferme des dérivées secondes, et nous identifierons les deux membres de cette équation, en les ordonnant l'un et l'autre par rapport aux dérivées secondes considérées comme variables. On voit alors, en se reportant aux valeurs (31) et (100), que, si nous prenons en particulier les trois termes carrés en $\left(\frac{\varphi^2}{x^2}\right)^2$, $\left(\frac{\varphi^2}{y^2}\right)^2$, $\left(\frac{\varphi^2}{z^2}\right)^2$, (qui doivent fournir les équations les plus simples, parce que ces carrés n'entrent pas dans la valeur de $\mathrm{K}\Delta_1^4\varphi$), il faudra tout d'abord que les trois coefficients A, B, C vérifient les trois équations suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &\left[\mathrm{B}b'\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2 + \mathrm{C}c'\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\right]a' - \Delta_1^2\varphi\left[\mathrm{B}\left(\frac{\varphi}{z}\right)^4 + \mathrm{C}\left(\frac{\varphi}{y}\right)^4\right] = 0, \\ &\left[\mathrm{C}c'\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \mathrm{A}a'\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]b' - \Delta_1^2\varphi\left[\mathrm{C}\left(\frac{\varphi}{x}\right)^4 + \mathrm{A}\left(\frac{\varphi}{z}\right)^4\right] = 0, \\ &\left[\mathrm{A}a'\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 + \mathrm{B}b'\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\right]c' - \Delta_1^2\varphi\left[\mathrm{A}\left(\frac{\varphi}{y}\right)^4 + \mathrm{B}\left(\frac{\varphi}{x}\right)^4\right] = 0; \end{aligned}\right.$$

ou, en ordonnant par rapport aux inconnues A, B, C,

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{B}\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\left[a'b' - \Delta_1^2\varphi\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right] + \mathrm{C}\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\left[c'a' - \Delta_1^2\varphi\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\right] = 0, \\ &\mathrm{C}\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\left[b'c' - \Delta_1^2\varphi\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\right] + \mathrm{A}\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\left[a'b' - \Delta_1^2\varphi\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right] = 0, \\ &\mathrm{A}\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\left[c'a' - \Delta_1^2\varphi\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\right] + \mathrm{B}\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\left[b'c' - \Delta_1^2\varphi\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\right] = 0, \end{aligned}\right.$$

lesquelles, en tenant compte de la quatrième ligne des égalités (106), ne sont autre chose que celles-ci

$$(B+C)\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2=0,\quad (C+A)\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2=0,\quad (A+B)\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2=0,$$

c'est-à-dire, en retranchant successivement chacune de la somme des deux autres, et divisant par $2\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2$,

$$A=0,\qquad B=0,\qquad C=0;$$

et l'on reconnaît ainsi assez rapidement l'impossibilité du développement sous la seconde forme (118) dans le cas général, c'est-à-dire à moins de supposer nulle l'une des trois dérivées $\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}$. Nous sommes dès lors ramenés à essayer la première forme (118) comme la plus simple et la plus probable.

Pour cela, ayant posé de nouveau

$$(121).\quad a''=\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2-\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2,\quad b''=\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2-\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2,\quad c''=\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2-\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2,$$

expressions qui, rapprochées des expressions (101), donnent, comme il est facile de le voir,

$$(122).\quad b'\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2-c'\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2=a''\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2,\ c'\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2-a'\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2=b''\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2,\ a'\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2-b'\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2=c''\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2,$$

nous déduirons des égalités (100) les valeurs suivantes

$$(123).\quad \left\{\begin{aligned}
bc'-cb'&=-a''\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}-b'\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}+c'\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}-2c'\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx}+2b'\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy},\\
ca'-ac'&=\ a'\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}-b''\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}-c'\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}+2c'\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}-2a'\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{xy},\\
ab'-ba'&=-a'\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}+b'\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}-c''\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}-2b'\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}+2a'\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx},
\end{aligned}\right.$$

et nous identifierons, en opérant comme tout à l'heure, le premier membre de l'équation (120) avec la première forme (118);

ce qui, en considérant tout d'abord, et pour les mêmes raisons, les mêmes termes que précédemment, nous donnera, eu égard aux valeurs (31) et (123), pour déterminer les coefficients A, B, C les trois équations

$$(124). \quad \left\{\begin{aligned} a'^2 &= A\left(\frac{\varphi}{x}\right)^4 a''^2 + B\left(\frac{\varphi}{y}\right)^4 a'^2 + C\left(\frac{\varphi}{z}\right)^4 a'^2, \\ b'^2 &= A\left(\frac{\varphi}{x}\right)^4 b'^2 + B\left(\frac{\varphi}{y}\right)^4 b''^2 + C\left(\frac{\varphi}{z}\right)^4 b'^2, \\ c'^2 &= A\left(\frac{\varphi}{x}\right)^4 c'^2 + B\left(\frac{\varphi}{y}\right)^4 c'^2 + C\left(\frac{\varphi}{z}\right)^4 c''^2, \end{aligned}\right.$$

lesquelles, en appliquant les formules connues, et tenant compte des relations suivantes, que l'on déduit immédiatement des égalités (101) et (121),

$$(125). \quad a'^2 - a''^2 = 4\left(\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2, \quad b'^2 - b''^2 = 4\left(\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\right)^2, \quad c'^2 - c''^2 = 4\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\right)^2,$$

et aussi de celle-ci, qui résulte des seules égalités (101),

$$(126). \quad \left\{\begin{aligned} & a'^2\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + b'^2\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 + c'^2\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2 - 4\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2 \\ & = a'\left(\frac{\varphi}{x}\right)^4 + b'\left(\frac{\varphi}{y}\right)^4 + c'\left(\frac{\varphi}{z}\right)^4 + 2\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\right)^2 = a'b'c', \end{aligned}\right.$$

donnent sans peine, pour les trois quantités $A\left(\frac{\varphi}{x}\right)^4$, $B\left(\frac{\varphi}{y}\right)^4$, $C\left(\frac{\varphi}{z}\right)^4$ considérées comme inconnues, les trois valeurs

$$(127). \quad A\left(\frac{\varphi}{x}\right)^4 = \frac{\left(a'\frac{\varphi}{x}\right)^2}{a'b'c'}, \quad B\left(\frac{\varphi}{y}\right)^4 = \frac{\left(b'\frac{\varphi}{y}\right)^2}{a'b'c'}, \quad C\left(\frac{\varphi}{z}\right)^4 = \frac{\left(c'\frac{\varphi}{z}\right)^2}{a'b'c'},$$

lesquelles se prêtent, d'ailleurs, très facilement à une vérification immédiate; car, si on les substitue, par exemple, dans la première (124), on obtiendra en chassant les dénominateurs :

$$a'^2.a'b'c' = a'^2\left[a''^2\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + b'^2\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2 + c'^2\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right],$$

ce qui, en tenant compte de la première (125), n'est autre chose que (126).

Cela fait, la possibilité du développement du premier membre de l'équation (120) sous la première forme (118) n'étant nullement établie jusqu'ici, puisqu'*à priori* la troisième forme (119) ou encore une infinité d'autres sont également admissibles, il sera évidemment nécessaire de vérifier que les valeurs de A, B, C qui résultent de celles que nous venons d'écrire, procurent bien également l'identification de tous les autres termes du développement. Or, bien que l'effet de cette vérification doive s'étendre à 18 termes, le développement en question en comportant 21 en tout, on voit facilement qu'il suffira, pour la pleine certitude, de s'en assurer pour 6 seulement; car, si nous représentons pour un instant chacun de ces 21 termes par leurs variables seules dans le tableau suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}
\left(\frac{\varphi^2}{x^2}\right)^2 & \left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2 & \frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2} & \frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{xy} & \frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{yz} & \frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{zx} & \frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{xy} \\
\left(\frac{\varphi^2}{y^2}\right)^2 & \left(\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2 & \frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{x^2} & \frac{\varphi^2}{xy}\frac{\varphi^2}{yz} & \frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{zx} & \frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{xy} & \frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{yz} \\
\left(\frac{\varphi^2}{z^2}\right)^2 & \left(\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2 & \frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2} & \frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{zx} & \frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{xy} & \frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{yz} & \frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{zx},
\end{array}\right.$$

on voit qu'ils se partagent en 7 groupes verticaux qui résultent chacun de la permutation circulaire des trois lettres x, y, z, et les coefficients de ces variables obéissant à la même loi dans chacune des expressions de H et de K, ainsi qu'il résulte des valeurs (31), il en sera évidemment de même pour tous les termes du premier membre de l'équation (120), en sorte qu'il suffira de constater l'identité cherchée seulement pour les premiers termes de chaque groupe vertical du tableau qui précède, c'est-à-dire pour 6 de ces termes seulement, puisque l'identité des termes du premier groupe est déjà assurée par la façon dont nous avons déterminé A, B, C.

Cette vérification s'opérera sans difficulté en tenant compte non seulement des valeurs (100), (101), (121) et (123), mais aussi des relations (106), (113), (116), (122), (125) et (126), que nous avons signalées entre les quantités a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''; et l'on acquerra ainsi la certitude que les valeurs de A, B, C déduites des valeurs (127) procurent bien effectivement l'identité du premier membre de l'équation (120) avec la première forme (118), c'est-à-dire que l'on a identiquement, en faisant la substitution,

$$\left\{\begin{aligned} &(H\Delta_1^3\varphi)^2 - 4\Delta_1^2\varphi(K\Delta_1^4\varphi) \\ &= \frac{1}{a'b'c'}\left[a'^2\left(\frac{\varphi}{x}\right)^{-2}(bc'-cb')^2 + b'^2\left(\frac{\varphi}{y}\right)^{-2}(ca'-ac')^2 + c'^2\left(\frac{\varphi}{z}\right)^{-2}(ab'-ba')^2\right], \end{aligned}\right.$$

formule qui, en multipliant par $a'b'c'\left(\frac{\varphi}{x}\,\frac{\varphi}{y}\,\frac{\varphi}{z}\right)^2$, n'est autre chose que l'identité (99), à laquelle nous nous proposions d'arriver; et c'est seulement après avoir reconnu la forme et s'être assuré de l'existence de cette formule par ce procédé un peu terre à terre, mais sûr et commode, et parfaitement suffisant pour une investigation personnelle, qu'il conviendra d'en chercher, en vue de l'exposition didactique, une démonstration synthétique dans le genre de celle que nous avons présentée. Ajoutons toutefois que dès que l'on aura procédé à la vérification que nous avons dite pour deux ou trois seulement des termes du tableau ci-dessus, et que l'on aura reconnu pour ces termes la concordance demandée, la probabilité du succès de l'identification totale équivaudra dès lors presque à la certitude; et l'on sera parfaitement en droit à partir de cet instant, sans crainte de faire œuvre vaine, de poursuivre la recherche d'une démonstration directe de cette formule.

Revenons maintenant à l'objet immédiat de ce dernier paragraphe qui est la recherche des ombilics, et voyons quelles conséquences nous devons tirer, relativement à cet objet, de la formule (99) que nous venons d'établir.

Si nous excluons d'abord les points pour lesquels l'une des trois premières dérivées $\frac{\varphi}{x}$, $\frac{\varphi}{y}$, $\frac{\varphi}{z}$ serait nulle, on voit d'après cette formule que pour que l'on ait $H^2 - 4K = 0$, il faut et il suffit que l'on ait à la fois

$$bc' - cb' = 0, \quad ca' - ac' = 0, \quad ab' - ba' = 0,$$

et ces trois équations, qui se réduisent aux deux suivantes

$$(128) \ldots\ldots \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

expriment, par conséquent, sous la restriction que nous venons de dire, les conditions auxquelles doivent satisfaire les coordonnées de tout ombilic, et déterminent complètement ces points, s'il en existe, conjointement avec l'équation de la surface.

Mais ces conclusions ne sauraient évidemment être maintenues, pour le moment du moins, pour les points dont les coordonnées annuleraient l'une des dérivées premières, et les solutions particulières qui correspondent à ces points nécessitent, par conséquent, de notre part un examen spécial.

Nous procéderons à cette discussion, en distinguant les trois cas où l'on supposerait nulles successivement, d'abord les trois dérivées à la fois, puis deux seulement, puis enfin une seule.

Nous devons écarter tout d'abord d'une façon absolue la première hypothèse, parce qu'alors la valeur (6) de R, de même que les valeurs (31) de H et de K, se présentant sous la forme infinie ou indéterminée, la courbure d'une section normale quelconque est nulle ou indéterminée, et, par conséquent, la définition précise de l'ombilic ne saurait s'appliquer à ces points *singuliers*. On voit d'ailleurs que pour ces mêmes points chacun des rapports (128) prend la forme $\frac{0}{0}$, et les équations elles-mêmes disparaissent sous la forme de l'indétermination.

Supposons donc d'abord seulement deux dérivées premières égales à zéro, soit, par exemple, $\frac{\varphi}{y}$ et $\frac{\varphi}{z}$. Ayant, dans ce cas, par les formules (2) et (31)

$$\Delta_1^2\varphi = \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2, \quad F\left(\frac{\varphi}{x}, \frac{\varphi}{y}, \frac{\varphi}{z}\right) = \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 \frac{\varphi^2}{x^2},$$

$$H\Delta_1^3\varphi = \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 \Delta_2\varphi - \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 \frac{\varphi^2}{x^2}, \quad K\Delta_1^4\varphi = \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 \left[\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2} - \left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)\right],$$

d'où l'on conclura immédiatement

$$\Delta_1^6\varphi(H^2-4K)=(H\Delta_1^3\varphi)^2-4\Delta_1^2\varphi(K\Delta_1^4\varphi)$$
$$=\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\left(\frac{\varphi^2}{y^2}+\frac{\varphi^2}{z^2}\right)\right]^2-4\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\left\{\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}-\left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2\right\}\right]$$
$$=\left(\frac{\varphi}{x}\right)^4\left[\left(\frac{\varphi^2}{y^2}+\frac{\varphi^2}{z^2}\right)^2-4\left\{\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}-\left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2\right\}\right]=\left(\frac{\varphi}{x}\right)^4\left[\left(\frac{\varphi^2}{y^2}-\frac{\varphi^2}{z^2}\right)^2+4\left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2\right],$$

on voit par cette dernière expression, $\frac{\varphi}{x}$ ou $\Delta_1\varphi$ n'étant pas nul par hypothèse, que, pour l'égalité des rayons de courbure principaux, et par suite des courbures de toutes les sections normales, il faudra alors les deux conditions

$$(129) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\varphi^2}{y^2}-\frac{\varphi^2}{z^2}=0, \qquad \frac{\varphi^2}{yz}=0,$$

auxquelles devront satisfaire, par conséquent, les coordonnées des ombilics pour lesquels le plan tangent serait parallèle au plan des yz.

Or, il est facile de voir que ces deux dernières équations sont bien ce que deviennent les équations (128) quand on y introduit les hypothèses $\frac{\varphi}{y}=0$, et $\frac{\varphi}{z}=0$, lesquelles réduisent les deux derniers rapports (128) respectivement à $\frac{\varphi^2}{z^2}$ et $\frac{\varphi^2}{y^2}$, et le premier à la forme $\frac{0}{0}$. L'une des équations (128) coïncide donc déjà manifestement dans ce cas avec la première (129). Pour voir ce que devient l'autre, nous la prendrons dans le cas général sous la forme $ab'-ba'=0$, c'est-à-dire sous celle-ci

$$\left[\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}-2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}\right]$$
$$-\left[\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}+\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}-2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx}\right]=0,$$

et nous y supposerons $\frac{\varphi}{y}$ et $\frac{\varphi}{z}$ infiniment petits du premier ordre.

On voit alors, en développant et séparant les termes d'ordre infinitésimal différent, qu'elle pourra s'écrire

$$\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\left[\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}-2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}\right]-\left[\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}$$

$$=-\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\left[\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}-2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}\right]-\left[\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}-2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx}\right],$$

équation dans laquelle tous les termes du premier membre sont du second ordre, et ceux du second membre du troisième ou du quatrième ordre. Le premier membre est donc séparément nul; c'est-à-dire que l'on a *rigoureusement,* en effaçant les termes qui se détruisent et divisant par $\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2$, qui n'est pas nul,

$$\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\left(\frac{\varphi^2}{z^2}-\frac{\varphi^2}{y^2}\right)-2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}=0.$$

Mais d'autre part l'égalité des deux derniers rapports (128) donne, dans la même hypothèse, d'après les principes mêmes de la méthode infinitésimale, c'est-à-dire, en négligeant les quantités infiniment petites devant les quantités finies, $\frac{\varphi^2}{z^2}=\frac{\varphi^2}{y^2}$; de telle sorte que l'on a aussi rigoureusement, en vertu de l'équation qui précède,

$$-2\frac{\varphi}{y}\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{yz}=0 \quad \text{ou} \quad \frac{\varphi^2}{yz}=0,$$

et l'on a bien ainsi, dans cette hypothèse de $\frac{\varphi}{y}$ et $\frac{\varphi}{z}$ infiniment petits, les deux équations (129), lesquelles subsistent, par conséquent, dans l'hypothèse des mêmes quantités rigoureusement nulles. Ces équations (129) sont donc bien ce que deviennent les équations (128) dans cette dernière hypothèse.

Pour voir, en second lieu, quelles conclusions nous devons tirer de la formule (99) dans la troisième hypothèse, c'est-à-dire celle où l'on suppose nulle une seule des trois dérivées premières, nous récrirons cette formule dans le cas général en la divisant par le carré de l'une de ces dérivées, $\frac{\varphi}{y}$ par exemple, de la façon suivante :

$$a'b'c'\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\right)^2 \Delta_1^6\varphi\,(H^2 - 4K)$$

$$= \left(a'\frac{\varphi}{z}\right)^2(bc'-cb')^2 + \left(b'\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\right)^2\left(\frac{ca'-ac'}{\frac{\varphi}{y}}\right)^2 + \left(c'\frac{\varphi}{x}\right)^2(ab'-ba')^2,$$

et y introduisant ensuite l'hypothèse de $\frac{\varphi}{y}=0$, nous en déduirons

$$(130).\quad \left\{\begin{aligned} &(a'b'c')_0\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\right)^2(\Delta_1\varphi)_0^6\,(H_0^2 - 4K_0)\\ &= \left(a'\frac{\varphi}{z}\right)_0^2(bc'-cb')_0^2 + \left(b'\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\right)_0^2\left(\frac{ca'-ac'}{\frac{\varphi}{y}}\right)_0^2 + \left(c'\frac{\varphi}{x}\right)_0^2(ab'-ba')_0^2,\end{aligned}\right.$$

l'indice zéro indiquant pour chaque quantité la substitution de zéro à la place de $\frac{\varphi}{y}$. Or, en nous reportant aux valeurs (100) et (101), et observant que b et b' ne contenant pas $\frac{\varphi}{y}$ ne seront pas atteints par cette substitution, nous obtiendrons immédiatement :

$$(131).\quad \left\{\begin{aligned} &a'_0 = \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2, \quad c'_0 = \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2, \quad (\Delta_1\varphi)_0^2 = \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2 = b',\\ &(a'b'c')_0 = a'_0c'_0b' = \left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\right)^2 b', \quad \left(a'\frac{\varphi}{z}\right)_0 = \left(\frac{\varphi}{z}\right)^3, \quad \left(c'\frac{\varphi}{x}\right)_0 = \left(\frac{\varphi}{x}\right)^3,\\ &(bc'-cb')_0 = bc'_0 - c_0b' = b\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 - \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}.b' = \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\left(b - b'\frac{\varphi^2}{y^2}\right),\\ &(a'b'-ba')_0 = a_0b' - ba'_0 = \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{y^2}.b' - b.\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2 = \left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\left(b'\frac{\varphi^2}{y^2} - b\right).\end{aligned}\right.$$

D'autre part, il est facile de voir que l'expression $\frac{ca'-ac'}{\frac{\varphi}{y}}$ n'est autre chose que le premier membre de l'équation (97), car on verra, en se reportant aux calculs qui la suivent dans l'exposé de notre troisième méthode, que l'équation suivante (98), ou

$ca' - ac' = 0$, a été obtenue précisément en multipliant cette équation (97) par $\frac{\varphi}{y}$, et ajoutant, pour la symétrie, des termes qui se détruisaient. Nous en conclurons donc, en y faisant $\frac{\varphi}{y} = 0$,

$$(132).\quad \left(\frac{ca' - ac'}{\frac{\varphi}{y}}\right)_0 = 2\frac{\varphi}{z}\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{yz} - 2\frac{\varphi}{x}\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{xy} = 2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz} - \frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\right);$$

et, si nous substituons maintenant les mêmes valeurs (131) et (132) dans l'égalité précédente (130), nous obtiendrons

$$\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\right)^2 b'.\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\right)^2.b'^3.(H_0^2 - 4K_0) = \left(\frac{\varphi}{z}\right)^6\cdot\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\left(b - b'\frac{\varphi^2}{y^2}\right)\right]^2$$

$$+ \left(b'\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\right)^2\cdot\left[2\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz} - \frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\right)\right]^2 + \left(\frac{\varphi}{x}\right)^6\cdot\left[\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\left(b'\frac{\varphi^2}{y^2} - b\right)\right]^2$$

$$= \left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\right)^4\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\right]\left(b - b'\frac{\varphi^2}{y^2}\right)^2 + 4b'^2\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\right)^4\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz} - \frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2;$$

d'où, en ayant égard à la valeur de b' (101), et divisant par $b'\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi}{z}\right)^4$,

$$b'^3(H_0^2 - 4K_0) = \left(b - b'\frac{\varphi^2}{y^2}\right)^2 + 4\left[\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2\right]\left(\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz} - \frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy}\right),$$

formule à laquelle se réduit l'identité (99) dans l'hypothèse de $\frac{\varphi}{y} = 0$, et qu'il est d'ailleurs facile de vérifier directement en partant des valeurs de H_0 et de K_0 déduites des expressions (31).

Cela posé, la formule que nous venons d'écrire montre que, pour obtenir l'égalité des rayons de courbure principaux, et par suite de toutes les courbures, dans l'hypothèse de $\frac{\varphi}{y} = 0$, il faudra poser les deux conditions

$$(133)\ldots\quad b - b'\frac{\varphi^2}{y^2} = 0, \qquad \frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz} - \frac{\varphi}{z}\frac{\varphi^2}{xy} = 0,$$

lesquelles devront être vérifiées par conséquent par les coordonnées de tout ombilic, pour lequel le plan tangent serait parallèle à l'axe des y.

Or, ces dernières équations rentrent encore évidemment dans les équations (128); car la première est manifestement ce que devient l'une ou l'autre des deux équations

$$cb' - bc' = 0, \qquad ab' - ba' = 0$$

dans cette hypothèse, et de même l'égalité (132) montre que la seconde (133) est bien ce que devient en même temps l'équation $ca' - ac' = 0$, débarrassée du facteur que nous y avions introduit par raison de symétrie, et qui lui communiquait dans ce cas son apparence d'indétermination.

Notons en passant que ce cas particulier se présentera pour tous les ombilics qui seront situés dans un plan de symétrie de la surface, toutes les fois que l'on prendra, ainsi qu'on y a tout avantage, ce plan de symétrie pour l'un des plans coordonnés, car alors le plan tangent pour tous les points situés dans ce plan étant forcément, par suite de la symétrie, perpendiculaire au même plan et par conséquent parallèle à l'un des axes coordonnés, l'une au moins des dérivées premières sera nulle pour tous ces points; et par conséquent les ombilics, s'il en existe dans ce plan, supposé pris pour plan des zx, vérifieront les équations particulières (133), que nous venons d'indiquer. Ce cas particulier présente donc une importance réelle qui justifie l'examen spécial que nous avons été amenés à en faire; nous en verrons d'ailleurs un peu plus loin une intéressante application.

En résumé, nous sommes donc ainsi assurés par la discussion qui précède que les solutions particulières que nous avions tout d'abord été obligés d'exclure, satisfont bien comme les autres aux équations (128), en sorte qu'il n'est pas nécessaire de maintenir cette exclusion, et que nous pouvons conclure encore une fois de cette méthode que tous les ombilics seront fournis par les équations (128) jointes à l'équation de la surface, ainsi que nous l'avions conclu des méthodes précédemment exposées.

Nous terminerons ce travail en appliquant la théorie que nous venons ainsi d'établir par quatre procédés différents à deux exemples intéressants, qui, bien qu'inégalement compliqués, offrent à ce point de vue une remarquable analogie, à savoir, l'*Ellipsoïde* et la *Surface des ondes de Fresnel,* et les résultats que nous obtiendrons très simplement pour le premier exemple, en faisant pressentir ceux relatifs au second, nous mettront sur la voie pour diriger et mener à bonne fin les calculs beaucoup plus complexes que réclame la même étude pour la seconde surface.

Prenons donc d'abord l'équation de l'ellipsoïde en posant :

$$2\varphi(x, y, z) = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1, \qquad \text{et} \qquad \varphi(x, y, z) = 0,$$

dans laquelle nous supposerons suivant l'usage $\alpha > \beta > \gamma$.

Ayant tiré de là :

$$\left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{\varphi}{x} = \dfrac{x}{\alpha^2}, & \dfrac{\varphi}{y} = \dfrac{y}{\beta^2}, & \dfrac{\varphi}{z} = \dfrac{z}{\gamma^2}, \\[2ex]
\dfrac{\varphi^2}{x^2} = \dfrac{1}{\alpha^2}, & \dfrac{\varphi^2}{y^2} = \dfrac{1}{\beta^2}, & \dfrac{\varphi}{z^2} = \dfrac{1}{\gamma^2}, \\[2ex]
\dfrac{\varphi^2}{yz} = 0, & \dfrac{\varphi^2}{zx} = 0, & \dfrac{\varphi^2}{xy} = 0,
\end{array}\right.$$

et substitué dans les deux équations (128), qui deviennent alors

$$\frac{\left(\frac{y}{\beta^2}\right)^2 \frac{1}{\gamma^2} + \left(\frac{z}{\gamma^2}\right)^2 \frac{1}{\beta^2}}{\left(\frac{y}{\beta^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma^2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{z}{\gamma^2}\right)^2 \frac{1}{\alpha^2} + \left(\frac{x}{\alpha^2}\right)^2 \frac{1}{\gamma^2}}{\left(\frac{z}{\gamma^2}\right)^2 + \left(\frac{x}{\alpha^2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)^2 \frac{1}{\beta^2} + \left(\frac{y}{\beta^2}\right)^2 \frac{1}{\alpha^2}}{\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta^2}\right)^2},$$

ou, en multipliant les deux termes de chaque rapport respectivement par $\beta^2\gamma^2$, $\gamma^2\alpha^2$, $\alpha^2\beta^2$:

$$\frac{\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}}{\gamma^2 \frac{y^2}{\beta^2} + \beta^2 \frac{z^2}{\gamma^2}} = \frac{\frac{z^2}{\gamma^2} + \frac{x^2}{\alpha^2}}{\alpha^2 \frac{z^2}{\gamma^2} + \gamma^2 \frac{x^2}{\alpha^2}} = \frac{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}}{\beta^2 \frac{x^2}{\alpha^2} + \alpha^2 \frac{y^2}{\beta^2}},$$

nous prendrons d'abord l'équation $ca' - ac' = 0$, c'est-à-dire celle qui résulte de l'égalité des rapports extrêmes ou la suivante

$$\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)\left(\gamma^2\frac{y^2}{\beta^2}+\beta^2\frac{z^2}{\gamma^2}\right)-\left(\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)\left(\beta^2\frac{x^2}{\alpha^2}+\alpha^2\frac{y^2}{\beta^2}\right)=0,$$

laquelle en ordonnant et réduisant peut s'écrire :

$$\frac{y^2}{\beta^2}\left[(\beta^2-\gamma^2)\frac{x^2}{\alpha^2}-(\gamma^2-\alpha^2)\frac{y^2}{\beta^2}+(\alpha^2-\beta^2)\frac{z^2}{\gamma^2}\right]=0.$$

Or, sous cette forme, on voit immédiatement que tous les termes de la parenthèse sont positifs d'après nos hypothèses sur la grandeur relative des trois axes, et ne peuvent s'annuler en même temps, puisque l'origine ne fait pas partie de la surface, Cette équation équivaut donc simplement à $y=0$, c'est-à-dire que tous les ombilics, s'il y en a, sont situés dans le plan principal perpendiculaire à l'axe moyen.

Introduisant cette solution $y=0$, dans l'une des deux autres équations que l'on peut prendre indifféremment, soit dans $ab'-ba'=0$, qui résulte de l'égalité des deux premiers rapports, elle deviendra

$$\frac{z^2}{\gamma^2}\left(\alpha^2\frac{z^2}{\gamma^2}+\gamma^2\frac{x^2}{\alpha^2}\right)-\left(\frac{z^2}{\gamma^2}+\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\beta^2\frac{z^2}{\gamma^2}=0,$$

ou bien

$$\frac{z^2}{\gamma^2}\left[(\alpha^2-\beta^2)\frac{z^2}{\gamma^2}-(\beta^2-\gamma^2)\frac{x^2}{\alpha^2}\right]=0,$$

équation qui peut être satisfaite, soit en annulant le facteur z^2, soit en annulant la parenthèse.

Or, il est facile de voir que la solution donnée par le premier facteur n'est pas admissible, car le point $y=0$, $z=0$, ou le sommet situé sur l'axe des x, que l'on obtiendrait ainsi, ne répond évidemment pas à la question. Les deux sections *principales* relatives à ce point (au point de vue *de la courbure*) sont, en effet, par une raison évidente de symétrie les sections *principales* de la surface (au point de vue *des diamètres*) dirigées suivant cet axe, c'est-à-dire les deux ellipses

$$(134).\quad . \quad . \quad . \quad \frac{z^2}{\gamma^2} + \frac{x^2}{\alpha^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

lesquelles, ayant même grand axe et des petits axes différents, ne peuvent évidemment présenter la même courbure au sommet de leur grand axe. (La valeur exacte du rayon de courbure, d'après une formule connue, serait pour l'une $\frac{\gamma^2}{\alpha}$, et pour l'autre $\frac{\beta^2}{\alpha}$). Le point en question ne saurait donc être un ombilic, et les seules solutions admissibles seront fournies par l'équation

$$(135).\quad . \quad . \quad . \quad (\alpha^2 - \beta^2)\frac{z^2}{\gamma^2} - (\beta^2 - \gamma^2)\frac{x^2}{\alpha^2} = 0,$$

laquelle, étant jointe à l'équation de la surface dans laquelle on aura fait $y = 0$, c'est-à-dire à la première des deux équations (134) précédentes, donne successivement pour déterminer x et z

$$(\alpha^2 - \gamma^2)\frac{x^2}{\alpha^2} = \alpha^2 - \beta^2, \qquad (\alpha^2 - \gamma^2)\frac{z^2}{\gamma^2} = \beta^2 - \gamma^2,$$

et, par conséquent, les coordonnées des points cherchés seront

$$(136).\quad x = \frac{\pm\alpha\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}}, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{\pm\gamma\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}},$$

ainsi que nous l'avons déjà obtenu par une autre méthode.

Géométriquement, on peut dire que les quatre points que nous venons de trouver sont déterminés par l'intersection dans le plan des zx des deux droites représentées par l'équation (135), ou, ce qui est la même chose, par celle-ci :

$$(137)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{z}{\gamma\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}} = \pm\frac{x}{\alpha\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$$

avec la première ellipse (134) ou la section principale de la surface correspondante à ce plan. Or, ces droites ne sont autre chose que les directions conjuguées des plans diamétraux qui donnent des sections circulaires dans l'ellipsoïde, résultat qu'il était facile de prévoir en se reportant à la théorie de l'indicatrice, que nous avons exposée dans le paragraphe III, et répétant, à ce sujet, le raisonnement que nous avons déjà fait pour découvrir la propriété fondamentale de la surface indicatrice.

En effet, d'une part, d'après les propriétés connues des surfaces du second ordre, le plan tangent à l'extrémité d'un diamètre est parallèle au plan diamétral conjugué, et les sections faites dans la surface par des plans parallèles, sont des courbes semblables ; d'autre part, d'après une propriété importante de l'indicatrice que nous avons démontrée, cette courbe est semblable à l'intersection de la surface par son propre plan tangent. Il s'ensuit donc immédiatement qu'à l'extrémité des diamètres figurés par l'équation (135) ou (137), c'est-à-dire des diamètres conjugués des plans qui donnent les sections circulaires, l'indicatrice sera une courbe semblable à un cercle, c'est-à-dire un cercle elle-même, et, par conséquent, ces points seront des ombilics. Et l'on voit ainsi que la théorie de l'indicatrice jointe aux propriétés connues des surfaces du second ordre, aurait permis d'obtenir sans calcul le résultat auquel nous venons de parvenir.

Passons maintenant à la *Surface des ondes*. L'équation de cette surface, telle qu'elle se présente immédiatement dans la théorie de la lumière, c'est-à-dire sous la forme où elle naît des conditions de propagation du mouvement vibratoire, est, comme l'on sait,

$$(138) \quad \frac{x^2}{r^2-\alpha^2}+\frac{y^2}{r^2-\beta^2}+\frac{z^2}{r^2-\gamma^2}=1,$$

en posant

$$(139) \quad r^2=x^2+y^2+z^2,$$

et désignant par α, β, γ trois constantes linéaires (les *vitesses* de propagation des ondes planes *parallèles aux trois plans coor-*

donnés), supposées rangées par ordre de grandeur décroissante, c'est-à-dire telles que l'on ait $\alpha > \beta > \gamma$.

Examinons d'abord rapidement quelle est la forme générale de cette surface.

Pour cela, ayant remarqué que la surface est symétrique par rapport aux trois plans coordonnés, nous étudierons, tout d'abord, ses sections principales. Dans ce but, afin de ne pas risquer de laisser de côté aucune solution, nous commencerons par mettre le premier membre sous la forme d'un polynôme entier, ainsi qu'il est d'usage pour toutes les équations algébriques, et nous obtiendrons ainsi, en chassant les dénominateurs

$$
\begin{aligned}
x^2(r^2-\beta^2)(r^2-\gamma^2) + y^2(r^2-\gamma^2)(r^2-\alpha^2) + z^2(r^2-\alpha^2)(r^2-\beta^2) \\
= (r^2-\alpha^2)(r^2-\beta^2)(r^2-\gamma^2),
\end{aligned}
$$

ou en développant, ayant égard à la valeur de r^2, réduisant et ordonnant :

$$
(140).\ \left\{
\begin{aligned}
&(x^2+y^2+z^2)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2) \\
&-\left[\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)x^2+\beta^2(\gamma^2+\alpha^2)y^2+\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)z^2\right]+\alpha^2\beta^2\gamma^2=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Sous cette forme, on voit qu'en y faisant successivement $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, cette équation donnera respectivement les trois courbes suivantes :

$$
(141)\ldots \left\{
\begin{aligned}
&(y^2+z^2-\alpha^2)(\beta^2y^2+\gamma^2z^2-\beta^2\gamma^2)=0, \\
&(z^2+x^2-\beta^2)(\gamma^2z^2+\alpha^2x-\gamma^2\alpha^2)=0, \\
&(x^2+y^2-\gamma^2)(\alpha^2x^2+\beta^2y^2-\alpha^2\beta^2)=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les trois sections principales se composent donc chacune d'un cercle et d'une ellipse, la constante correspondant au plan considéré étant le rayon du cercle, et les deux autres les axes de l'ellipse. D'après le classement par ordre de grandeur admis pour les constantes, on voit immédiatement que le cercle sera extérieur à l'ellipse sur le plan des yz, qu'il lui sera intérieur sur le plan des xy, enfin qu'il la coupera en quatre points sur le plan des zx, c'est-à-dire dans celui qui correspond au paramètre moyen β.

On reconnaît donc déjà l'existence de deux nappes qui se couperaient sur le plan des zx aux points que nous venons de dire. Il s'agit de savoir maintenant suivant quelle ligne ces deux nappes se coupent sur la surface, ou bien si elles ne se rencontrent que dans des points isolés, parmi lesquels seraient ces quatre mêmes points.

On y arrivera en menant par l'origine un rayon vecteur quelconque aux cosinus directeurs λ, μ, ν

$$x = \lambda r, \quad y = \mu r, \quad z = \nu r,$$

et cherchant les points de rencontre de cette droite avec la surface, qui seront donnés par l'équation du troisième degré

$$(142). \quad \frac{\lambda^2 r^2}{r^2-\alpha^2} + \frac{\mu^2 r^2}{r^2-\beta^2} + \frac{\nu^2 r^2}{r^2-\gamma^2} = 1,$$

laquelle se réduira simplement au second degré en chassant les dénominateurs, à cause de la relation

$$(143). \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

et fournira par conséquent en général deux points d'intersection pour chaque sens du rayon, ou deux nappes, comme nous l'avons reconnu déjà par les sections principales.

On devra dès lors évidemment obtenir l'ensemble des points communs aux deux nappes de la surface, en écrivant que cette équation a deux racines égales, c'est-à-dire en égalant son discriminant à zéro ; mais ce procédé, employé par Lamé (*), exige que l'on transforme ensuite ce discriminant à l'aide d'un calcul un peu compliqué, pour pouvoir en déduire la conclusion cherchée, et nous préférons arriver au même résultat sans calcul, en appliquant à l'équation qui précède (142) un mode de discussion algébrique

(*) Voir *Leçons sur la Théorie mathématique de l'Élasticité*, par Lamé. 19e leçon. 2e édition, pages 254 et 255.

emprunté aux *Vorlesungen* de Jacobi, qui en fait sortir la notion des coordonnées elliptiques, et examinant ensuite quelles conséquences géométriques il en résulte pour la forme de la surface.

Pour cela nous écrirons, en divisant tous les termes par r^2, l'équation du troisième degré (142) de la façon suivante :

$$\frac{\lambda^2}{r^2-\alpha^2}+\frac{\mu^2}{r^2-\beta^2}+\frac{\nu^2}{r^2-\gamma^2}-\frac{1}{r^2}=0;$$

il sera facile de voir alors que λ, μ, ν étant des constantes quelconques, cette équation admettra toujours pour r^2 trois racines réelles, dont deux, que nous désignerons r'^2 et r''^2, seront séparées ainsi qu'il suit :

$$\alpha^2 > r'^2 > \beta^2 > r''^2 > \gamma^2.$$

En effet pour $r^2 = \alpha^2 - \varepsilon^2$, ε étant infiniment petit, le premier membre de l'équation est négatif, attendu que le premier terme est extrêmement grand et donne son signe à ce premier membre; il serait, au contraire, positif, par une raison semblable pour $r^2 = \beta^2 + \varepsilon^2$; et par conséquent, comme il reste d'ailleurs une fonction continue de r^2 entre ces deux limites, il y a une racine comprise entre $\alpha^2 - \varepsilon^2$ et $\beta^2 + \varepsilon^2$. On constaterait de même l'existence d'une autre racine entre $\beta^2 - \varepsilon^2$ et $\gamma^2 + \varepsilon^2$, et deux racines étant réelles, la troisième l'est nécessairement. D'où, en passant à la limite, c'est-à-dire en supposant ε rigoureusement nul, on obtient la conclusion énoncée quelques lignes plus haut, laquelle subsiste évidemment quelles que soient les constantes λ, μ, ν.

Cette discussion à la vérité ne classe pas la troisième racine, c'est-à-dire n'apprend pas si elle est supérieure à α^2, ou inférieure à γ^2, mais cela nous importe peu, attendu que dans le cas particulier qui nous occupe, c'est-à-dire celui où l'on suppose entre λ, μ, ν la relation (143), cette racine devient infinie quelle que soit la direction du rayon vecteur, et par conséquent ne correspond à aucun point de la surface.

Cela posé, les deux valeurs de r^2 devant évidemment se confondre en une seule pour tous les points communs aux deux nappes de la surface, il résulte immédiatement de cette discussion que dans ce même cas les racines r'^2 et r''^2, qui nous intéressent seules, et doivent devenir égales pour tous ces points, seront alors égales à β^2 pour les mêmes points. L'équation $r^2 = \beta^2$, ou ce qui est la même chose, en vertu de l'équation de définition (139), celle-ci :

$$(144). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \beta^2,$$

jointe à l'équation de la surface (138), caractérisera donc l'ensemble des points communs aux deux nappes de la surface, ou, en d'autres termes, ces deux équations seront celles de la ligne d'intersection de ces deux nappes. Or, si l'on fait attention que l'hypothèse $r^2 = \beta^2$, introduite dans l'équation (138) exige que l'on ait en même temps $y = 0$, sans quoi le premier membre serait infini, le second restant toujours fini, on voit qu'on pourra substituer à l'équation (144) l'équation $y = 0$, pour définir cette ligne, laquelle se trouvera être ainsi la courbe plane définie par la seconde équation (141). Or cette courbe se compose, comme nous l'avons vu, d'un cercle et d'une ellipse, qui appartiennent chacune à une nappe différente, et n'offrent que leurs quatre points d'intersection de communs à ces deux nappes. On reconnaît donc ainsi que l'ensemble des points cherchés au lieu d'être une ligne à double courbure, comme on devait s'y attendre, se compose seulement de ces quatre points, qui sont, par conséquent, les seuls points doubles de la surface.

Leurs coordonnées étant fournies dans le plan des zx par les deux équations :

$$z^2 + x^2 = \beta^2, \qquad \gamma^2 z^2 + \alpha^2 x^2 = \gamma^2 \alpha^2,$$

on en tire immédiatement :

$$x^2 = \frac{\gamma^2(\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha^2 - \gamma^2}, \qquad z^2 = \frac{\alpha^2(\beta^2 - \gamma^2)}{\alpha^2 - \gamma^2},$$

ce qui donne pour ces coordonnées les trois valeurs suivantes :

$$(145) \qquad x = \frac{\pm\gamma\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}, \quad y = 0, \quad z = \frac{\pm\alpha\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}.$$

Notons encore qu'il résulte en même temps de cette discussion, qu'aucun rayon vecteur n'est infini, et que par conséquent la surface est limitée dans tous les sens, son plus grand diamètre étant 2α, et son plus petit 2γ.

La forme générale de la surface étant suffisamment définie par ce qui précède, nous rechercherons maintenant comme seconde application des théories exposées dans ce dernier paragraphe les ombilics situés dans les sections principales de la surface.

Tout d'abord, la présence des quatre points exceptionnels (145) dans le plan principal correspondant au paramètre moyen, comme l'étaient les ombilics de l'ellipsoïde, et surtout l'analogie frappante des expressions qui précèdent avec celles (136), que nous avons trouvées auparavant pour les coordonnées de ces derniers points, donnent lieu tout de suite de penser que ces quatre points doubles pourraient bien être en même temps des ombilics de la surface. C'est pourquoi nous commencerons nos recherches par la section principale des zx.

Il existe, on s'en souvient, une condition nécessaire qui doit être satisfaite pour qu'il en puisse être ainsi, et qui, si elle n'est pas vérifiée de prime abord, tranchera par là même la question, et nous dispensera de pousser plus loin nos recherches.

En effet, si cette hypothèse est justifiée, nous nous trouverons alors dans le second cas particulier examiné à propos de notre quatrième méthode, lequel a lieu d'une façon générale, ainsi que nous l'avons remarqué, pour tous les ombilics situés dans un plan de symétrie de la surface. Or, nous avons vu que dans ce cas les équations générales (128) ou (93) se réduisaient aux deux équations (133); c'est-à-dire, en d'autres termes, que pour qu'il y eût des ombilics dans le plan des zx, il fallait qu'il existât un système de valeurs des *deux* inconnues x et z satisfaisant à la fois à *trois* équations, à savoir ces deux équations (133) et l'équation de la surface dans laquelle on aurait fait $y = 0$.

Or, on voit sans peine en calculant les dérivées de φ, correspondant à la surface que nous étudions, que cette solution est possible dans le cas actuel, car ayant alors déduit sans difficulté, par le moyen du théorème des fonctions composées de

$$(146). \quad 2\varphi(x, y, z) = \frac{x^2}{r^2 - \alpha^2} + \frac{y^2}{r^2 - \beta^2} + \frac{z^2}{r^2 - \gamma^2} - 1,$$

les valeurs des dérivées

$$(147) \ldots \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\varphi}{x} = Ax, & \dfrac{\varphi}{y} = By, & \dfrac{\varphi}{z} = Cz, \\ \dfrac{\varphi^2}{yz} = 2A'x, & \dfrac{\varphi^2}{zx} = 2B'zx, & \dfrac{\varphi^2}{xy} = 2C'xy, \end{array} \right.$$

où A, B, C, A', B', C' sont les quantités suivantes

$$(148). \left\{ \begin{array}{l} A = \dfrac{1}{r^2 - \alpha^2} - G, \quad B = \dfrac{1}{r^2 - \beta^2} - G, \quad C = \dfrac{1}{r^2 - \gamma^2} - G, \\ A' = \dfrac{1}{(r^2-\alpha^2)^2} - g + 2G', \; B' = \dfrac{1}{(r^2-\beta^2)^2} - g + 2G', \; C' = \dfrac{1}{(r^2-\gamma^2)^2} - g + 2G', \end{array} \right.$$

en désignant de nouveau pour abréger par g, G et G' les expressions suivantes

$$(149). \left\{ \begin{array}{l} g = \dfrac{1}{(r^2 - \alpha^2)^2} + \dfrac{1}{(r^2 - \beta^2)^2} + \dfrac{1}{(r^2 - \gamma^2)^2}, \\ G = \dfrac{x^2}{(r^2-\alpha^2)^2} + \dfrac{y^2}{(r^2-\beta^2)^2} + \dfrac{z^2}{(r^2-\gamma^2)^2}, \; G' = \dfrac{x^2}{(r^2-\alpha^2)^3} + \dfrac{y^2}{(r^2-\beta^2)^3} + \dfrac{z^2}{(r^2-\gamma^2)^3}, \end{array} \right.$$

la seconde équation (133) deviendra

$$(149^{bis}). \quad \ldots \quad 2xyz(AA' - CC') = 0,$$

laquelle étant satisfaite d'elle-même lorsque l'on suppose comme nous le faisons $y = 0$, on voit qu'il suffira pour satisfaire à la question de trouver deux valeurs d'x et de z vérifiant la première équation (133) et l'équation de la surface dans laquelle on aura fait $y = 0$, ou, ce qui est la même chose, en gardant comme inconnue la variable auxiliaire r, trois valeurs d'x, z et r_0 vérifiant les deux équations

$$(150). \quad . \quad . \quad x^2 + z^2 = r_0^2, \qquad \frac{x^2}{r_0^2 - \alpha^2} + \frac{z^2}{r_0^2 - \gamma^2} = 1,$$

et la première équation (133), dans laquelle nous devrons évidemment supposer aussi y égal à zéro.

Or, cette première équation (133), qui en vertu des valeurs (100) et (101) de b et de b' est en général la suivante

$$\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2 \frac{\varphi^2}{x^2} + \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 \frac{\varphi^2}{z^2} - 2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^{2\prime}}{zx} - \left[\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\right]\frac{\varphi^2}{y^2} = 0,$$

devient dans le cas actuel, en y substituant les valeurs des dérivées déjà calculées (147)

$$C^2z^2\left(\frac{\varphi^2}{x^2}\right) + A^2x^2\left(\frac{\varphi^2}{z^2}\right) - 4CAB'z^2x^2 - (C^2z^2 + A^2x^2)\left(\frac{\varphi^2}{y^2}\right) = 0;$$

et quand on y aura fait $y = 0$, si l'on marque par l'indice zéro le résultat de la substitution pour chaque quantité, elle pourra se mettre sous la forme :

$$(151). \quad . \quad C_0^2z^2\left(\frac{\varphi^2}{x^2} - \frac{\varphi^2}{y^2}\right)_0 - A_0^2x^2\left(\frac{\varphi^2}{y^2} - \frac{\varphi^2}{z^2}\right)_0 - 4C_0A_0B_0'z^2x^2 = 0,$$

équation dans laquelle il faudra remplacer d'abord les quantités A_0, B_0, C_0, B_0', $\left(\frac{\varphi^2}{x^2}\right)_0$, $\left(\frac{\varphi^2}{y^2}\right)_0$, $\left(\frac{\varphi^2}{z^2}\right)_0$, par leurs valeurs en x, z et r_0, puis la joindre aux deux équations (150), et les résoudre enfin toutes les trois par rapport à ces trois inconnues.

Dans ce but, nous pouvons d'abord tirer des deux équations (150) les valeurs de x^2 et de z^2 en fonction de r_0^2, qui sont

$$(152). \quad . \quad . \quad x^2 = \frac{-\gamma^2(r_0^2 - \alpha^2)}{\alpha^2 - \gamma^2}, \qquad z^2 = \frac{\alpha^2(r_0^2 - \gamma^2)}{\alpha^2 - \gamma^2},$$

et exprimer à l'aide de ces valeurs les quantités A_0, B_0, ..., également en fonction de r_0, puis reporter ces différentes valeurs dans l'équation (151), qui ne contiendra plus ainsi que la seule inconnue r_0 ; et la valeur fournie alors pour r_0 par cette équation, étant à son tour reportée dans les égalités précédentes (152), nous donnera définitivement les valeurs cherchées de x et de z. Telle est la marche que nous adopterons pour faire ce calcul.

Pour cela il nous reste d'abord à calculer, à l'aide des formules (147) et (148), les expressions en x, y et z des dérivées secondes $\frac{\varphi^2}{x^2}$, $\frac{\varphi^2}{y^2}$, $\frac{\varphi^2}{z^2}$, lesquelles se déduiront évidemment les unes des autres, de même que ces formules, par la permutation circulaire simultanée des trois variables x, y, z, et des trois paramètres α, β, γ. Il suffira donc d'en calculer une seule.

Ayant déduit à cet effet des expressions (148) et (149)

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{2x}{(r^2-\alpha^2)^2} - \frac{dG}{dx}, \quad \frac{dG}{dx} = \frac{2x}{(r^2-\alpha^2)^2} - 4G'x,$$

d'où, en substituant l'une dans l'autre,

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{2x}{(r^2-\alpha^2)^2} - \left(\frac{2x}{(r^2-\alpha^2)^2} - 4G'x\right) = -\frac{4x}{(r^2-\alpha^2)^2} + 4G'x,$$

nous en conclurons, en différentiant la première (147)

$$\frac{\varphi^2}{x^2} = A + x\frac{dA}{dx} = A + x\left(-\frac{4x^2}{(r^2-\alpha^2)^2} + 4G'x\right),$$

c'est-à-dire, en remplaçant A par sa valeur (148), la première des trois formules suivantes :

$$(152^{\text{bis}}).\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\varphi^2}{x^2} &= \frac{1}{r^2-\alpha^2} - G - \frac{4x^2}{(r^2-\alpha^2)^2} + 4G'x^2, \\ \frac{\varphi^2}{y^2} &= \frac{1}{r^2-\beta^2} - G - \frac{4y^2}{(r^2-\beta^2)^2} + 4G'y^2, \\ \frac{\varphi^2}{z^2} &= \frac{1}{r^2-\gamma^2} - G - \frac{4z^2}{(r^2-\gamma^2)^2} + 4G'z^2, \end{aligned}\right.$$

d'où nous tirerons immédiatement :

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\varphi^2}{x^2}-\frac{\varphi^2}{y^2}&=\frac{1}{r^2-\alpha^2}-\frac{1}{r^2-\beta^2}-4\left[\frac{x^2}{(r^2-\alpha^2)^2}-\frac{y^2}{(r^2-\beta^2)^2}\right]+4G'(x^2-y^2)\\ \frac{\varphi^2}{y^2}-\frac{\varphi^2}{z^2}&=\frac{1}{r^2-\beta^2}-\frac{1}{r^2-\gamma^2}-4\left[\frac{y^2}{(r^2-\beta^2)^2}-\frac{z^2}{(r^2-\gamma^2)^2}\right]+4G'(y^2-z^2).\end{aligned}\right.$$

Cela posé, si nous faisons maintenant $y=0$, à la fois dans ces dernières valeurs et dans les expressions (148), nous obtiendrons :

$$(153)\ldots\left\{\begin{aligned}\left(\frac{\varphi^2}{x^2}-\frac{\varphi^2}{y^2}\right)_0&=\frac{1}{r_0^2-\alpha^2}-\frac{1}{r_0^2-\beta^2}+4x^2\left(G'_0-\frac{1}{(r_0^2-\alpha^2)^2}\right),\\ \left(\frac{\varphi^2}{y^2}-\frac{\varphi^2}{z^2}\right)_0&=\frac{1}{r_0^2-\beta^2}-\frac{1}{r_0^2-\gamma^2}-4z^2\left(G'_0-\frac{1}{(r_0^2-\gamma^2)^2}\right),\end{aligned}\right.$$

$$(154).\left\{\begin{aligned}&A_0=\frac{1}{r_0^2-\alpha^2}-G_0,\quad B_0=\frac{1}{r_0^2-\beta^2}-G_0,\quad C_0=\frac{1}{r_0^2-\gamma^2}-G_0,\\ &B'_0=\frac{1}{(r_0^2-\beta^2)^2}-g_0+2G'_0,\end{aligned}\right.$$

et l'on voit que, pour avoir l'expression de ces dernières quantités en fonction de r_0 seul, il suffira d'avoir obtenu celles de G_0 et G'_0, au moyen de la même inconnue.

A cet effet les expressions (149) nous donnant, quand on y fait $y=0$,

$$(155).\left\{\begin{aligned}&g_0=\frac{1}{(r_0^2-\alpha^2)^2}+\frac{1}{(r_0^2-\beta^2)^2}+\frac{1}{(r_0^2-\gamma^2)^2},\\ &G_0=\frac{x^2}{(r_0^2-\alpha^2)^2}+\frac{z^2}{(r_0^2-\gamma^2)^2},\quad G'_0=\frac{x^2}{(r_0^2-\alpha^2)^3}+\frac{z^2}{(r_0^2-\gamma^2)^3};\end{aligned}\right.$$

nous substituerons dans ces deux valeurs de G_0 et G'_0 à la place de x^2 et de z^2 leurs valeurs (152), ce qui nous donnera d'abord pour la première

$$\begin{aligned}
G_0 &= \frac{1}{(r_0^2-\alpha^2)^2}\cdot\frac{-\gamma^2(r_0^2-\alpha^2)}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{1}{(r_0^2-\gamma^2)^2}\cdot\frac{\alpha^2(r_0^2-\gamma^2)}{\alpha^2-\gamma^2}\\
&= \frac{1}{\alpha^2-\gamma^2}\left[\frac{-\gamma^2}{r_0^2-\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{r_0^2-\gamma^2}\right]=\frac{-\gamma^2(r_0^2-\gamma^2)+\alpha^2(r_0^2-\alpha^2)}{(\alpha^2-\gamma^2)(r_0^2-\alpha^2)(r_0^2-\gamma^2)}\\
&= \frac{(\alpha^2-\gamma^2)r_0^2-(\alpha^4-\gamma^4)}{(\alpha^2-\gamma^2)(r_0^2-\alpha^2)(r_0^2-\gamma^2)}=\frac{r_0^2-(\alpha^2+\gamma^2)}{(r_0^2-\alpha^2)(r_0^2-\gamma^2)},
\end{aligned}$$

en sorte que G_0 pourra s'écrire sous l'une ou l'autre des deux formes :

$$(156).\left\{\begin{aligned}
G_0 &= \frac{(r_0^2-\gamma^2)-\alpha^2}{(r_0^2-\alpha^2)(r_0^2-\gamma^2)}=\frac{1}{r_0^2-\alpha^2}-\frac{\alpha^2}{(r_0^2-\alpha^2)(r_0^2-\gamma^2)}\\
G_0 &= \frac{(r_0^2-\alpha^2)-\gamma^2}{(r_0^2-\alpha^2)(r_0^2-\gamma^2)}=\frac{1}{r_0^2-\gamma^2}-\frac{\gamma^2}{(r_0^2-\alpha^2)(r_0^2-\gamma^2)}.
\end{aligned}\right.$$

Nous obtiendrons de même en opérant d'une façon analogue pour G_0' :

$$\begin{aligned}
G_0' &= \frac{1}{(r_0^2-\alpha^2)^3}\cdot\frac{-\gamma^2(r_0^2-\alpha^2)}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{1}{(r_0^2-\gamma^2)^3}\cdot\frac{\alpha^2(r_0^2-\gamma^2)}{\alpha^2-\gamma^2}\\
&= \frac{1}{\alpha^2-\gamma^2}\left[\frac{-\gamma^2}{(r_0^2-\alpha^2)^2}+\frac{\alpha^2}{(r_0^2-\gamma^2)^2}\right]=\frac{-\gamma^2(r_0^2-\gamma^2)^2+\alpha^2(r_0^2-\alpha^2)^2}{(\alpha^2-\gamma^2)(r_0^2-\alpha^2)^2(r_0^2-\gamma^2)^2}.
\end{aligned}$$

Or, si nous développons le numérateur de cette dernière expression, nous trouverons qu'il peut être transformé successivement de la façon suivante

$$\begin{aligned}
&-\gamma^2(r_0^2-\gamma^2)^2+\alpha^2(r_0^2-\alpha^2)^2\\
&=-\gamma^2(r_0^4-2\gamma^2r_0^2+\gamma^4)+\alpha^2(r_0^4-2\alpha^2r_0^2+\alpha^4)\\
&=(\alpha^2-\gamma^2)\,r_0^4-2(\alpha^4-\gamma^4)r_0^2+\alpha^6-\gamma^6\\
&=(\alpha^2-\gamma^2)\left[r_0^4-2(\alpha^2+\gamma^2)\,r_0^2+\alpha^4+\alpha^2\gamma^2+\gamma^4\right],
\end{aligned}$$

en sorte que la valeur immédiatement précédente de G_0' deviendra, en supprimant haut et bas le facteur constant $\alpha^2 - \gamma^2$,

$$G_0' = \frac{r_0^4 - 2(\alpha^2 + \gamma^2) r_0^2 + \alpha^4 + \alpha^2\gamma^2 + \gamma^4}{(r_0^2 - \alpha^2)^2 (r_0^2 - \gamma^2)^2}.$$

Mais dans cette dernière expression le numérateur pouvant lui-même être écrit sous l'une des deux formes :

$$(r_0^4 - 2\gamma^2 r_0^2 + \gamma^4) + \alpha^4 + \alpha^2\gamma^2 - 2\alpha^2 r_0^2 = (r_0^2 - \gamma^2)^2 + \alpha^2(\alpha^2 + \gamma^2 - 2r_0^2),$$
$$(r_0^4 - 2\alpha^2 r_0^2 + \alpha^4) + \gamma^4 + \alpha^2\gamma^2 - 2\gamma^2 r_0^2 = (r_0^2 - \alpha^2)^2 + \gamma^2(\alpha^2 + \gamma^2 - 2r_0^2),$$

on voit que cette dernière valeur de G_0' pourra, elle aussi, être représentée par les deux expressions

$$\left\{\begin{aligned} G_0' &= \frac{1}{(r_0^2 - \alpha^2)^2} + \frac{\alpha^2(\alpha^2 + \gamma^2 - 2r_0^2)}{(r_0^2 - \alpha^2)^2 (r_0^2 - \gamma^2)^2}, \\ G_0' &= \frac{1}{(r_0^2 - \gamma^2)^2} + \frac{\gamma^2(\alpha^2 + \gamma^2 - 2r_0^2)}{(r_0^2 - \alpha^2)^2 (r_0^2 - \gamma^2)^2}, \end{aligned}\right.$$

d'où nous conclurons immédiatement

$$G_0' - \frac{1}{(r_0^2 - \alpha^2)^2} = \alpha^2 h_0, \qquad G_0' - \frac{1}{(r_0^2 - \gamma^2)^2} = \gamma^2 h_0,$$

en posant

$$h_0 = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - 2r_0^2}{(r_0^2 - \alpha^2)^2 (r_0^2 - \gamma^2)^2}.$$

Si maintenant nous substituons ces deux dernières valeurs dans les expressions (153), ainsi que dans celle de B_0' (154), laquelle, en tenant compte de la valeur (155) de g_0, peut s'écrire ainsi

$$\begin{aligned} B_0' &= -\left(\frac{1}{(r_0^2 - \alpha^2)^2} + \frac{1}{(r_0^2 - \gamma^2)^2}\right) + 2G_0' \\ &= \left(G_0' - \frac{1}{(r_0^2 - \alpha^2)^2}\right) + \left(G_0' - \frac{1}{(r_0^2 - \gamma^2)^2}\right), \end{aligned}$$

on voit qu'elles deviendront

$$\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\varphi^2}{x^2}-\frac{\varphi^2}{y^2}\right)_0=\frac{1}{r_0^2-\alpha^2}-\frac{1}{r_0^2-\beta^2}+4h_0\alpha^2x^2,\\&\left(\frac{\varphi^2}{y^2}-\frac{\varphi^2}{z^2}\right)_0=\frac{1}{r_0^2-\beta^2}-\frac{1}{r_0^2-\gamma^2}-4h_0\gamma^2z^2,\\&\qquad\qquad B_0'=(\alpha^2+\gamma^2)h_0;\end{aligned}\right.$$

tandis que les deux expressions (156) de G_0, étant reportées respectivement dans les valeurs (154) de A_0 et de C_0, nous donneront de même :

$$A_0=\frac{\alpha^2}{(r_0^2-\alpha^2)(r_0^2-\gamma^2)},\quad C_0=\frac{\gamma^2}{(r_0^2-\alpha^2)(r_0^2-\gamma^2)}.$$

Et enfin, si nous remettons en dernier lieu les valeurs que nous venons d'écrire pour A_0, C_0, B_0, $\left(\frac{\varphi^2}{x^2}-\frac{\varphi^2}{y^2}\right)_0$, et $\left(\frac{\varphi^2}{y^2}-\frac{\varphi^2}{z^2}\right)_0$ dans l'équation (151), nous aurons pour l'équation qui doit déterminer r_0

$$\left[(r_0^2-\alpha^2)(r_0^2-\gamma^2)\right]^{-2}\left[\gamma^4z^2\left(\frac{1}{r_0^2-\alpha^2}-\frac{1}{r_0^2-\beta^2}+4h_0\alpha^2x^2\right)\right.$$
$$\left.-\alpha^4x^2\left(\frac{1}{r_0^2-\beta^2}-\frac{1}{r_0^2-\gamma^2}-4h_0\gamma^2z^2\right)-4\gamma^2\alpha^2(\alpha^2+\gamma^2)h_0z^2x^2\right]=0,$$

c'est-à-dire simplement, en réduisant,

$$\left[(r_0^2-\alpha^2)(r_0^2-\gamma^2)\right]^{-2}\left[\gamma^4z^2\left(\frac{1}{r_0^2-\alpha^2}-\frac{1}{r_0^2-\beta^2}\right)-\alpha^4x^2\left(\frac{1}{r_0^2-\beta^2}-\frac{1}{r_0^2-\gamma^2}\right)\right]=0,$$

ou, en remplaçant x^2 et z^2 par leurs valeurs (152), et multipliant par $(\alpha^2-\gamma^2)$,

$$\left[(r_0^2-\alpha^2)(r_0^2-\gamma^2)\right]^{-2}\left[\gamma^4\alpha^2(r_0^2-\gamma^2)\frac{r_0^2-\beta^2-(r_0^2-\alpha^2)}{(r_0^2-\alpha^2)(r_0^2-\beta^2)}+\alpha^4\gamma^2(r_0^2-\alpha^2)\frac{r_0^2-\gamma^2-(r_0^2-\beta^2)}{(r_0^2-\beta^2)(r_0^2-\gamma_2)}\right]=0,$$

ou enfin, en réduisant au même dénominateur,

$$(157)\quad \frac{\gamma^2\alpha^2\left[\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)(r_0^2-\gamma^2)^2+\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)(r_0^2-\alpha^2)^2\right]}{(r_0^2-\alpha^2)^3(r_0^2-\gamma^2)^3(r_0^2-\beta^2)}=0,$$

équation qui, ayant pour numérateur une somme de deux carrés qui ne peuvent s'annuler à la fois, n'admet aucune solution réelle, et par conséquent il semble, au premier abord, que l'on doive conclure de là que la surface ne présente aucun ombilic dans le plan des zx.

Mais si l'on y regarde de plus près, on s'apercevra que la forme d'équation (138) de la surface, d'où nous sommes partis, ne peut rien nous apprendre, en raison des dénominateurs qu'elle renferme, pour les points dont les coordonnées annulent l'un de ces dénominateurs; car, pour ces points-là, elle devient indéterminée, l'une des fractions du premier membre prenant alors la forme $\frac{0}{0}$. Aussi, lorsqu'il s'est agi de déterminer les sections principales, avons-nous eu soin de chasser les dénominateurs et de les ramener préalablement à la forme entière (140), sans quoi une part importante de la solution nous eût forcément échappé pour chacune des trois sections. Ces dénominateurs se perpétuant, comme on le sait, par la différentiation, se retrouvent nécessairement dans les équations du second ordre qui déterminent les ombilics, et dès lors la conclusion à laquelle semble nous avoir conduits le calcul précédent ne saurait être définitive, puisque les solutions qui donneraient $r=\alpha$, $r=\beta$, ou $r=\gamma$, au cas où elles existeraient réellement, seraient ainsi forcément laissées dans l'ombre, en partant de la forme d'équation (138).

Mais ayant effectué les calculs qui précèdent, en partant de cette forme d'équation, il est facile d'obtenir très rapidement le résultat auquel nous serions parvenus, si nous étions partis de la forme entière (140), que nous n'avons pas adoptée parce qu'elle se prête moins facilement à l'exécution de ce calcul, mais qui a l'avantage de ne laisser de côté aucune solution, et à laquelle, par conséquent, nous sommes obligés de revenir pour résoudre définitivement la question qui nous occupe.

En effet, ayant posé pour abréger

$$R = (r^2 - \alpha^2)(r^2 - \beta^2)(r^2 - \gamma^2),$$

et

$$\Phi(x, y, z) = R\varphi(x, y, z),$$

où φ représente toujours la fonction définie par l'équation (146), et ayant déduit de là

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\Phi}{x} = R\frac{\varphi}{x} + \varphi\frac{dR}{dx}, \quad \frac{\Phi}{y} = R\frac{\varphi}{y} + \varphi\frac{dR}{dy}, \quad \frac{\Phi}{z} = R\frac{\varphi}{z} + \varphi\frac{dR}{dz}, \\
\frac{\Phi^2}{x^2} = R\frac{\varphi^2}{x^2} + 2\frac{\varphi}{x}\frac{dR}{dx} + \varphi\frac{d^2R}{dx^2}, \quad \frac{\Phi^2}{y^2} = R\frac{\varphi^2}{y^2} + 2\frac{\varphi}{y}\frac{dR}{dy} + \varphi\frac{d^2R}{dy^2}, \\
\frac{\Phi^2}{z^2} = R\frac{\varphi^2}{z^2} + 2\frac{\varphi}{z}\frac{dR}{dz} + \varphi\frac{d^2R}{dz^2}, \quad \frac{\Phi^2}{zx} = R\frac{\varphi^2}{zx} + \frac{\varphi}{z}\frac{dR}{dx} + \frac{\varphi}{x}\frac{dR}{dz} + \varphi\frac{d^2R}{dzdx},
\end{array}\right.$$

on voit que, pour les points de la surface considérée, on aura simplement

$$\left\{\begin{array}{c}
\frac{\Phi}{x} = R\frac{\varphi}{x}, \quad \frac{\Phi}{y} = R\frac{\varphi}{y}, \quad \frac{\Phi}{z} = R\frac{\varphi}{z}, \\
\frac{\Phi^2}{x^2} = R\frac{\varphi^2}{x^2} + 2\frac{\varphi}{x}\frac{dR}{dx}, \quad \frac{\Phi^2}{y^2} = R\frac{\varphi^2}{y^2} + 2\frac{\varphi}{y}\frac{dR}{dy}, \quad \frac{\Phi^2}{z^2} = R\frac{\varphi^2}{z^2} + 2\frac{\varphi}{z}\frac{dR}{dz}, \\
\frac{\Phi^2}{zx} = R\frac{\varphi^2}{zx} + \frac{\varphi}{z}\frac{dR}{dx} + \frac{\varphi}{x}\frac{dR}{dz};
\end{array}\right.$$

de sorte que, si au lieu de calculer l'équation $b - b'\frac{\varphi^2}{y^2} = 0$, comme nous l'avons fait pour l'équation $\varphi(x, y, z) = 0$, nous l'eussions calculée pour la forme entière (140), c'est-à-dire pour l'équation $\Phi(x, y, z) = 0$, auquel cas elle eût été

$$\left(\frac{\Phi}{z}\right)^2\frac{\Phi^2}{x^2} + \left(\frac{\Phi}{x}\right)^2\frac{\Phi^2}{z^2} - 2\frac{\Phi}{z}\frac{\Phi}{x}\frac{\Phi^2}{zx} - \left[\left(\frac{\Phi}{z}\right)^2 + \left(\frac{\Phi}{x}\right)^2\right]\frac{\Phi^2}{y^2} = 0,$$

nous aurions obtenu en réalité de la sorte, par suite des valeurs qui précèdent, l'équation

$$R^2\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\left(R\frac{\varphi^2}{x^2}+2\frac{\varphi}{x}\frac{dR}{dx}\right)+R^2\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\left(R\frac{\varphi^2}{z^2}+2\frac{\varphi}{z}\frac{dR}{dz}\right)$$
$$-2R^2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\left(R\frac{\varphi^2}{zx}+\frac{\varphi}{z}\frac{dR}{dx}+\frac{\varphi}{x}\frac{dR}{dz}\right)-R^2\left[\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\right]\left(R\frac{\varphi^2}{y^2}+2\frac{\varphi}{y}\frac{dR}{dy}\right)=0,$$

dans laquelle il nous aurait fallu supposer en outre $y=0$, ou, ce qui est la même chose, $\frac{\varphi}{y}=0$, à cause de la valeur (147). On voit alors, en réduisant, et se rappelant que r ni par conséquent R non plus que ses dérivées ne peuvent jamais devenir infinies, que nous eussions obtenu simplement

$$R^3\left[\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2\frac{\varphi^2}{x^2}+\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\frac{\varphi^2}{z^2}-2\frac{\varphi}{z}\frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{zx}-\left\{\left(\frac{\varphi}{z}\right)^2+\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2\right\}\frac{\varphi^2}{y^2}\right]=0,$$

ce qui n'est autre chose que la même équation (133) calculée pour l'équation $\varphi(x, y, z)=0$, ou la forme (138), et multipliée simplement par R^3.

Faisant donc subir cette modification à l'équation (157), que nous avons obtenue comme dernière transformation de l'équation $b-b'\frac{\varphi^2}{y^2}=0$ dans le cas actuel, on voit qu'elle devient

$$(158)\quad \gamma^2\alpha^2\left[\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)\,(r_0^2-\gamma^2)^2+\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)(r_0^2-\alpha^2)^2\right](r_0^2-\beta^2)^2=0,$$

équation qui est, par conséquent, celle à laquelle nous fussions arrivés à la suite d'un calcul analogue, en partant de la forme d'équation entière (140). On voit qu'elle admet la seule solution $r_0=\beta$, le facteur entre crochets ne pouvant s'annuler, comme nous l'avons déjà remarqué. Cette valeur $r_0=\beta$, étant d'ailleurs reportée dans les valeurs (152) de x et de z, donnera pour ces deux inconnues précisément les expressions (145), c'est-à-dire les coordonnées des quatre points doubles de la surface, résultat que la forme seule de ces expressions nous avait déjà fait pressentir, et que nous nous étions proposé justement de vérifier.

Il est donc incontestable que les quatre points doubles de la surface vérifient les équations qui déterminent les ombilics, et sont d'ailleurs les seuls dans la section principale des zx. Aussi plusieurs auteurs, et notamment Lamé (*) et après lui Catalan, leur donnent-ils le nom d'ombilics. Toutefois ici se pose la question de savoir si nous devons les considérer comme de véritables ombilics. Ces points doubles, en effet, appartiennent à la catégorie des points singuliers dont nous avons déjà parlé dans la discussion présentée à l'occasion de notre quatrième méthode, qui annulent à la fois les trois dérivées premières de φ, et pour lesquels, par conséquent, le plan tangent et la normale perdent toute signification déterminée. Or, nous avons eu soin de faire remarquer alors, on s'en souvient, que pour de pareils points, les équations (93) qui déterminent les ombilics, disparaissant alors sous la forme de l'indétermination, il était indispensable de procéder pour ces points à une discussion spéciale, afin de pouvoir décider si ces points satisfaisaient bien aux conditions géométriques qui caractérisent les ombilics. C'est donc ce que nous nous proposons de faire pour les quatre points doubles que nous venons de rencontrer; seulement, pour ne pas interrompre nos calculs, nous reporterons cette discussion après les développements que réclame la recherche des ombilics pour les deux autres sections principales.

Pour effectuer cette recherche, il ne sera pas nécessaire à présent de recommencer des calculs analogues; de simples permutations circulaires suffiront. En effet, les équations qui détermineraient de pareils points dans la section principale des xy, par exemple, à savoir

$$c - c'\frac{\varphi^2}{z^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\varphi}{y}\frac{\varphi^2}{zx} - \frac{\varphi}{x}\frac{\varphi^2}{yz} = 0,$$

jointes à l'équation de la surface dans laquelle on aurait fait $z=0$,

(*) Voir Lamé, *Leçons sur la Théorie mathématique de l'Élasticité.* (Leçon 19e, pp. 258 et suivantes.)

se déduisant de celles que nous venons de traiter par la permutation simultanée de x, y, z et α, β, γ, par suite des valeurs (100) et (101) de a, b, c, a', b', c', et (147) et (152^bis) des dérivées de φ qui obéissent à la même loi, on voit immédiatement qu'il suffira d'effectuer les mêmes changements dans les équations (149^bis) et (158) qui ne sont autres que les équations (133) transformées pour le cas que nous venons de traiter.

Or, des deux équations ainsi obtenues, la première,

$$(159) \quad \ldots\ldots \quad 2xyz(\mathrm{BB}' - \mathrm{AA}') = 0,$$

étant encore satisfaite d'elle-même quand on suppose $z = 0$, tout revient donc à déterminer la nouvelle valeur de r_0 par la seconde équation qui sera alors

$$(160) \quad \alpha^2\beta^2\left[\alpha^2(\beta^2 - \gamma^2)(r_0^2 - \alpha^2)^2 + \beta^2(\gamma^2 - \alpha^2)(r_0^2 - \beta^2)^2\right](r_0^2 - \gamma^2)^2 = 0,$$

et à en déduire les valeurs correspondantes de x et de y par les équations

$$(161) \ldots \quad x^2 + y^2 = r_0^2, \qquad \frac{x^2}{r_0^2 - \alpha^2} + \frac{y^2}{r_0^2 - \beta^2} = 1.$$

Or, il arrive ici que la solution n'est plus fournie par le facteur $r_0^2 - \gamma^2$, comme on pourrait le croire d'après le cas précédent, car il est facile de voir que la valeur $r_0^2 = \gamma^2$ reportée dans les valeurs

$$(162) \ldots \quad x^2 = \frac{-\beta^2(r_0^2 - \alpha^2)}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad y^2 = \frac{\alpha^2(r_0^2 - \beta^2)}{\alpha^2 - \beta^2},$$

qu'on obtient en résolvant par rapport à x et y les deux équations précédentes, donnerait pour y une valeur imaginaire. Mais le facteur entre crochets, qui dans le cas présent n'est plus une somme de carrés comme tout à l'heure, donnera étant égal à zéro

$$\alpha^2(\beta^2 - \gamma^2)(r_0^2 - \alpha^2)^2 - \beta^2(\alpha^2 - \gamma^2)(r_0^2 - \beta^2)^2 = 0;$$

d'où

$$\left(\frac{r_0^2 - \alpha^2}{r_0^2 - \beta^2}\right)^2 = \frac{\beta^2(\alpha^2 - \gamma^2)}{\alpha^2(\beta^2 - \gamma^2)},$$

et, en extrayant la racine carrée,

$$\frac{r_0^2-\alpha^2}{r_0^2-\beta^2}=\frac{-\beta\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}{\alpha\sqrt{\beta^2-\gamma^2}};$$

car, la solution $r_0=\gamma$ étant écartée par ce que nous venons de dire, il résulte de la troisième équation (141) que r_0 variera nécessairement entre α et β. De cette dernière équation on tire immédiatement

$$\frac{r_0^2-\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{-\beta\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}{\alpha\sqrt{\beta^2-\gamma^2}+\beta\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}},$$

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{r_0^2-\beta^2}=\frac{\alpha\sqrt{\beta^2-\gamma^2}+\beta\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}{\alpha\sqrt{\beta^2-\gamma^2}};$$

d'où, en substituant dans les valeurs (162), nous obtiendrons les solutions

$$(163)\quad x^2=\frac{\beta^3\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}{\alpha\sqrt{\beta^2-\gamma^2}+\beta\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}},\quad y^2=\frac{\alpha^3\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}{\alpha\sqrt{\beta^2-\gamma^2}+\beta\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}},$$

qui définissent quatre nouveaux ombilics situés dans le plan principal des xy.

On verrait exactement de la même façon que les ombilics de la section principale des yz, s'il en existe, devant être fournis par les équations

$$a-a'\frac{\varphi^2}{x^2}=0,\qquad \frac{\varphi}{z}\,\frac{\varphi^2}{xy}-\frac{\varphi}{y}\,\frac{\varphi^2}{zx}=0,$$

jointes à l'équation de la surface dans laquelle on a fait $x=0$, seront donnés dans le cas actuel par les quatre équations

$$\left\{\begin{array}{c} 2xyz\,(\mathrm{CC}'-\mathrm{BB}')=0,\\ y^2+z^2=r_0^2,\qquad \dfrac{y^2}{r_0^2-\beta^2}+\dfrac{z^2}{r_0^2-\gamma^2}=1,\\ \beta^2\gamma^2\left[\beta^2(\gamma^2-\alpha^2)(r_0^2-\beta^2)^2+\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)(r_0^2-\gamma^2)^2\right](r_0^2-\alpha^2)^2=0,\end{array}\right.$$

qui se déduisent des équations (159), (161) et (160) par la permutation circulaire que nous avons dite. Or la première étant encore satisfaite d'elle-même pour $x=0$, on verrait aussi comme tout à l'heure que le facteur $r_0^2-\alpha^2$ de la dernière équation ne saurait fournir de solution, attendu que la valeur correspondante de y serait encore imaginaire; et, pour obtenir immédiatement les solutions fournies par l'autre facteur de la même équation, il suffira évidemment d'effectuer les mêmes permutations dans les solutions obtenues pour le cas précédent, c'est-à-dire dans les formules (163), ce qui donnera sans nouveau calcul

$$y^2=\frac{\gamma^3\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\beta\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}+\gamma\sqrt{\beta^2-\alpha^2}},\quad z^2=\frac{\beta^3\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}{\beta\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}+\gamma\sqrt{\beta^2-\alpha^2}},$$

ou, en multipliant haut et bas par $\sqrt{-1}$ dans les deux expressions, afin de mettre en évidence leur réalité,

$$(164)\quad y^2=\frac{\gamma^3\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}+\gamma\sqrt{\alpha^2-\beta^2}},\quad z^2=\frac{\beta^3\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}{\beta\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}+\gamma\sqrt{\alpha^2-\beta^2}},$$

valeurs qui définissent encore quatre nouveaux ombilics dans la section principale des yz.

Nous avons donc ainsi reconnu l'existence de quatre points satisfaisant aux équations caractéristiques des ombilics dans chacune des sections principales de la surface, soit *douze* solutions réelles par conséquent pour toute la surface. Il est à remarquer que les coordonnées des deux derniers systèmes (163) et (164), c'est-à-dire des solutions situées dans les plans principaux des xy et des yz, (correspondant au plus grand et au plus petit paramètre), peuvent s'exprimer très simplement en fonction des coordonnées (145) des quatre points doubles, c'est-à-dire des solutions situées dans le plan principal des zx (correspondant au paramètre moyen). En effet, si nous posons dans ce but :

$$(165)\ldots\quad X=\frac{\gamma\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}},\qquad Z=\frac{\alpha\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}},$$

X et Z étant ainsi les coordonnées du point double appartenant au trièdre des coordonnées positives, il est facile de voir que les valeurs (163) et (164) pourront s'écrire, en divisant les unes et les autres par $\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$,

$$(166) \ldots \quad \left\{ \begin{array}{ll} x^2 = \dfrac{\beta^3}{\beta + Z}, & y^2 = \dfrac{\alpha^2 Z}{\beta + Z}, \\ y^2 = \dfrac{\gamma^2 X}{\beta + X}, & z^2 = \dfrac{\beta^3}{\beta + X}, \end{array} \right.$$

et l'on peut remarquer d'après ces valeurs que les deux systèmes de points se permutent l'un dans l'autre en permutant respectivement à la fois x et z, α et γ, et X et Z, sans toucher à y ni à β.

Ces deux systèmes de points se changeant ainsi l'un dans l'autre par une simple permutation circulaire, on s'étonnera peut-être au premier abord que la première série de solutions que nous avons trouvée, c'est-à-dire celle située dans le plan des zx, n'obéisse pas à la même loi, bien que toutes les équations que l'on doit écrire pour y arriver se déduisent bien les unes des autres par permutation circulaire, en passant de l'une quelconque à une autre des trois sections principales. Mais la raison de cette anomalie apparente est facile à apercevoir; elle tient uniquement à ce que dans la dernière équation du calcul (158) et dans ses analogues, la solution réelle n'est pas fournie par le même facteur pour les trois sections, étant donnée par le facteur $(r_0^2 - \beta^2)$ pour la première, et par le facteur entre crochets pour les deux autres. Mais si, sortant des considérations exclusivement géométriques quant à leur interprétation, on considère les solutions analytiques tant imaginaires que réelles du problème, on voit que toutes les solutions ainsi obtenues se déduiront évidemment en passant d'une section à l'autre par la simple permutation des lettres x, y, z, et α, β, γ, de même que les équations qui les auront fournies.

Les expressions des coordonnées (166) que nous venons d'écrire se prêtent très aisément à la vérification d'une construction élégante qui a été indiquée pour ces deux derniers points par le Colonel Mannheim, dans son *Cours de Géométrie descriptive* (*), et que nous allons établir à l'aide de ces formules.

Ayant désigné par θ et θ' les deux angles que forme dans le plan des zx, respectivement avec les axes des x et des z, le diamètre aboutissant au point double (X, Z), et tels, par conséquent, que $\theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$; ayant de plus remarqué que nous aurons alors

$$(167).\quad \cos\theta = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Z^2}} = \frac{X}{\beta}, \qquad \cos\theta' = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Z^2}} = \frac{Z}{\beta},$$

pour obtenir la seconde série des points précédents (166), nous considérerons le cône de révolution

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\left(x \cos\frac{\theta}{2} + z \sin\frac{\theta}{2}\right)^2,$$

dont le sommet est l'origine, dont l'axe, ayant pour cosinus directeurs (d'après l'équation générale des surfaces de révolution) $\cos\frac{\theta}{2}$, 0, $\sin\frac{\theta}{2}$, est manifestement la bissectrice de l'angle θ, et dont enfin la section méridienne par le plan des zx, ayant pour équation

$$x^2 + z^2 = 2\left(x \cos\frac{\theta}{2} + z \sin\frac{\theta}{2}\right)^2,$$

ou, ce qui est la même chose, en décomposant en facteurs

$$\left[x\cos\theta - z(1 - \sin\theta)\right]\left[x\cos\theta + z(1 + \sin\theta)\right] = 0,$$

se compose par conséquent des deux droites

$$z = \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}x, \quad z = \frac{-\cos\theta}{1 + \sin\theta}x,$$

(*) Voir également une note du même auteur dans les *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 5 mai 1879 (tome 88, p. 902).

dont l'angle ω, ayant pour tangente

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} - \dfrac{-\cos\theta}{1+\sin\theta}}{1 + \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\,\dfrac{-\cos\theta}{1+\sin\theta}} = \frac{\dfrac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta}}{1 - \dfrac{\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}} = \frac{2\cos\theta}{0} = \infty$$

est égal par conséquent à $\frac{\pi}{2}$. Ce cône sera donc engendré par la révolution autour de la bissectrice de l'angle θ d'un diamètre faisant avec cette droite un angle égal à $\frac{\pi}{4}$.

Cela posé, nous construirons les deux génératrices suivant lesquelles ce cône est coupé par le plan des xy, et qui sont les deux droites

$$x^2 + y^2 = 2\,x^2 \cos^2\frac{\theta}{2},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$y^2 = x^2 \cos\theta,$$

à cause de la formule connue

$$2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta.$$

Puis prenant en particulier les points où ces deux droites rencontrent le cercle $x^2 + y^2 = \gamma^2$, section principale des xy, et dont les coordonnées seront par conséquent données par les deux équations

$$(168).\left\{\begin{array}{ll} \gamma^2 = 2x^2\cos^2\dfrac{\theta}{2}, \quad \text{d'où} & x^2 = \dfrac{\gamma^2}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = \dfrac{\gamma^2}{1+\cos\theta}, \\[2ex] y^2 = x^2\cos\theta, \quad \text{ou} & y^2 = \dfrac{\gamma^2\cos\theta}{1+\cos\theta}, \end{array}\right.$$

nous mènerons par ces points deux plans parallèles au plan des zx, ou perpendiculaires à l'axe des y, dont l'équation sera précisément la dernière que nous venons d'écrire; et enfin les points où ces deux derniers plans rencontreront l'ellipse, section principale des yz, seront les ombilics de cette section ; car en reportant cette dernière valeur de y^2 dans l'équation

$$\beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = \beta^2 \gamma^2, \quad \text{d'où} \quad \gamma^2 z^2 = \beta^2(\gamma^2 - y^2),$$

il viendra, en divisant par γ^2,

$$z^2 = \beta^2 \left(1 - \frac{\cos\theta}{+\cos\theta}\right) = \frac{\beta^2}{1 + \cos\theta};$$

et si nous remettons maintenant dans cette dernière valeur, ainsi que dans la seconde valeur (168) de y^2, à la place de $\cos\theta$ sa valeur (167), nous obtiendrons définitivement

$$y^2 = \frac{\gamma^2 \frac{X}{\beta}}{1 + \frac{X}{\beta}} = \frac{\gamma^2 X}{\beta + X}, \qquad z^2 = \frac{\beta^2}{1 + \frac{X}{\beta}} = \frac{\beta^3}{\beta + X},$$

c'est-à-dire, précisément les secondes valeurs (166), ce qui établit bien le résultat que nous venons d'énoncer.

On obtiendrait exactement de la même façon la première série de points (166), en construisant l'autre cône de révolution

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\left(x \sin\frac{\theta'}{2} + z \cos\frac{\theta'}{2}\right)^2,$$

ayant encore pour sommet l'origine, et un angle au sommet égal à $\frac{\pi}{4}$, mais dont l'axe sera cette fois la bissectrice de l'angle θ', dont les cosinus directeurs sont évidemment $\sin\frac{\theta'}{2}$, 0, $\cos\frac{\theta'}{2}$; car ce cône rencontrant le cercle de rayon α, section principale des yz, aux points déterminés par les équations

$$y^2 + z^2 = 2 z^2 \cos^2\frac{\theta'}{2}, \qquad y^2 + z^2 = \alpha^2,$$

et dont les coordonnées sont par conséquent (en opérant comme tout à l'heure)

$$z^2 = \frac{\alpha^2}{1+\cos\theta'}, \qquad y^2 = \frac{\alpha^2\cos\theta'}{1+\cos\theta'},$$

si nous menons encore par ces quatre points deux plans parallèles aux zx, ces plans rencontreront l'ellipse section principale des xy, aux quatre points fournis par les deux équations

$$\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 = \alpha^2\beta^2, \qquad y^2 = \frac{\alpha^2\cos\theta'}{1+\cos\theta'},$$

d'où nous tirerons, comme tout à l'heure, en divisant par α^2

$$x^2 = \beta^2\left(1 - \frac{\cos\theta'}{1+\cos\theta'}\right) = \frac{\beta^2}{1+\cos\theta'},$$

et par conséquent, en remettant à la place de cos θ' sa valeur (167) dans ces deux dernières valeurs de x^2 et de y^2, nous obtiendrons pour les coordonnées des points résultant de la construction que nous venons de dire

$$x^2 = \frac{\beta^2}{1+\frac{Z}{\beta}} = \frac{\beta^3}{\beta+Z}, \qquad y^2 = \frac{\alpha^2\frac{Z}{\beta}}{1+\frac{Z}{\beta}} = \frac{\alpha^2 Z}{\beta+Z},$$

c'est-à-dire précisément les premières expressions (166), et l'on retrouve bien ainsi la construction indiquée par le Colonel Mannheim, dans l'ouvrage déjà cité.

Aucune incertitude ne pouvant exister pour ces deux dernières séries d'ombilics (166), qui, eux, ne sont pas des points singuliers de la surface, revenons maintenant à la première série de solutions que nous avons rencontrées dans le plan des zx, c'est-à-dire aux quatre points doubles (145), dans le but d'élucider la question de savoir si, oui ou non, nous devons les considérer comme de véritables ombilics.

Pour cela nous vérifierons tout d'abord que les coordonnées (145) de ces points satisfont aux équations

$$\frac{\Phi}{x}=0, \quad \frac{\Phi}{y}=0, \quad \frac{\Phi}{z}=0,$$

qui caractérisent les points singuliers, Φ étant, comme nous l'avons déjà supposé, le premier membre de l'équation entière de la surface (140), c'est-à-dire l'expression

$$\Phi(x, y, z)=\tfrac{1}{2}(\mathrm{P}r^2-\mathrm{Q}+\alpha^2\beta^2\gamma^2),$$

où P et Q sont respectivement

$$(169). \left\{\begin{aligned} \mathrm{P}&=\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2 \\ \mathrm{Q}&=\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)\,x^2+\beta^2(\gamma^2+\alpha^2)\,y^2+\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)\,z^2. \end{aligned}\right.$$

En effet, ayant déduit de là, comme précédemment,

$$(170) \;.\;.\;.\; \frac{\Phi}{x}=\mathrm{A}x, \quad \frac{\Phi}{y}=\mathrm{B}y, \quad \frac{\Phi}{z}=\mathrm{C}z,$$

A, B, C étant non plus les expressions (148), mais dorénavant les suivantes

$$(171). \;.\;.\;.\; \left\{\begin{aligned} \mathrm{A}&=\mathrm{P}+\alpha^2r^2-\alpha^2(\beta^2+\gamma^2) \\ \mathrm{B}&=\mathrm{P}+\beta^2r^2-\beta^2(\gamma^2+\alpha^2) \\ \mathrm{C}&=\mathrm{P}+\gamma^2r^2-\gamma^2(\alpha^2+\beta^2), \end{aligned}\right.$$

qui se déduisent les unes des autres par permutation circulaire, si nous désignons par l'indice double zéro les quantités correspondantes aux points doubles en question, ayant, par suite des valeurs des coordonnées (145),

$$\mathrm{P}_{00}=\alpha^2\gamma^2, \quad r_{00}^2=\beta^2,$$

on voit de suite que l'on aura, par les valeurs qui précèdent,

$$(172) \;.\;.\; \mathrm{A}_{00}=0, \quad \mathrm{B}_{00}=(\beta^2-\alpha^2)(\beta^2-\gamma^2), \quad \mathrm{C}_{00}=0,$$

et par conséquent, ces points étant dans le plan des zx,

$$(173) \quad . \quad . \quad . \left(\frac{\Phi}{x}\right)_{00} = 0, \quad \left(\frac{\Phi}{y}\right)_{00} = 0, \quad \left(\frac{\Phi}{z}\right)_{00} = 0,$$

égalités qui ne ressortent pas avec la même évidence de la forme d'équation (138), à cause de la présence du dénominateur $r^2 - \beta^2$ qui communique aux équations correspondantes pour les mêmes points l'apparence de l'indétermination.

Cela posé, la notion du plan tangent et de la normale perdant toute signification déterminée par ces points, il ne saurait être question davantage pour eux de sections normales, ni de rayons de courbure correspondants ; et les formules (5) et (6), que nous avons employées jusqu'ici ne correspondant plus à rien, ne sauraient rien nous donner dans le cas actuel. Voyons donc par quelles autres notions analogues nous devrions les remplacer, de façon à rester autant que possible dans le même ordre d'idées.

Dans cet esprit, le plan tangent étant défini dans le cas général comme le lieu de toutes les tangentes menées par un point de la surface, nous chercherons tout d'abord quel est ce lieu dans le cas actuel. A cet effet, appelant toujours (X, 0, Z) les coordonnées (165) de l'un des quatre points doubles, nous mènerons par ce point une droite quelconque aux cosinus directeurs a, b, c

$$(174) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{x - X}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z - Z}{c} = k,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(175) \quad . \quad . \quad x = X + ak, \quad y = bk, \quad z = Z + ck,$$

équations dans lesquelles la valeur commune des rapports

$$k = \frac{\sqrt{(x - X)^2 + y^2 + (z - Z)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{(x - X)^2 + y^2 + (z - Z)^2}$$

représente, comme l'on sait, la distance du point variable (x, y, z) au point fixe (X, 0, Z).

Cela posé, si nous cherchons à déterminer par l'élimination de x, y, z entre les équations (174) ou (175) et l'équation de la surface (140) les différentes valeurs de k correspondant aux points d'intersection de la droite et de la surface, on voit *à priori* que l'équation résultante, qui sera du quatrième degré, aura dans tous les cas *deux* racines nulles, puisque le point (X, Z) est un point double, c'est-à-dire que les coefficients de k et du terme constant de cette équation seront nuls, quels que soient a, b, c; et si l'on veut de plus que la droite considérée soit une tangente de la surface, il faudra qu'une nouvelle racine devienne nulle, c'est-à-dire que le coefficient de k^2 soit nul également. On voit donc qu'on obtiendra les conditions nécessaires et suffisantes pour que la droite (174) soit une tangente, en égalant à zéro le coefficient de k^2 dans l'équation

$$\begin{aligned}&\left[(X+ak)^2+b^2k^2+(Z+ck)^2\right]\left[\alpha^2(X+ak)^2+\beta^2b^2k^2+\gamma^2(Z+ck)^2\right]\\ &-\left[\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)(X+ak)^2+\beta^2(\gamma^2+\alpha^2)\,b^2k^2+\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)(Z+ck)^2\right]+\alpha^2\beta^2\gamma^2=0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire, eu égard aux égalités

$$(176)\ .\ .\ .\quad X^2+Z^2=\beta^2,\qquad \alpha^2X^2+\gamma^2Z^2=\alpha^2\gamma^2,$$

qui se déduisent immédiatement des valeurs (165), en posant l'équation

$$\left\{\begin{aligned}&\alpha^2\gamma^2(a^2+b^2+c^2)+\beta^2(\alpha^2a^2+\beta^2b^2+\gamma^2c^2)\\ &\quad+4(Xa+Zc)(\alpha^2Xa+\gamma^2Zc)\\ &-\left[\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)\,a^2+\beta^2(\gamma^2+\alpha^2)\,b^2+\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)\,c^2\right]=0,\end{aligned}\right.$$

ou, en réduisant,

$$(177)\quad 4(Xa+Zc)(\alpha^2Xa+\gamma^2Zc)+\left[\beta^4-(\gamma^2+\alpha^2)\beta^2+\alpha^2\gamma^2\right]b^2=0,$$

équation qu'on peut encore écrire, en développant et ayant égard à la valeur (172) de B_{00},

$$(178).\qquad 4\left[\alpha^2X^2a^2+\gamma^2Z^2c^2+(\alpha^2+\gamma^2)XZac\right]+B_{00}b^2=0.$$

Cela posé, pour obtenir le lieu de toutes les tangentes menées par le point (X, Z), il suffira d'éliminer les cosinus a, b, c qui particularisent la droite considérée, entre les équations (174) et cette dernière équation (178), qui est homogène par rapport à ces cosinus, ce qui se fera par conséquent en remplaçant simplement a, b, c par des quantités proportionnelles $x-\mathrm{X}$, y, $z-\mathrm{Z}$, et l'on obtiendra ainsi pour ce lieu l'équation

$$(179)\quad 4\left[\alpha^2\mathrm{X}^2(x-\mathrm{X})^2+\gamma^2\mathrm{Z}^2(z-\mathrm{Z})^2+(\alpha^2+\gamma^2)\mathrm{XZ}(x-\mathrm{X})(z-\mathrm{Z})\right]+\mathrm{B}_{00}y^2=0,$$

laquelle définit un cône du second ordre, ayant pour sommet le point (X, Z), comme il était nécessaire, et, en outre, admettant pour plan principal le plan des zx, ainsi qu'on pouvait le prévoir également, puisque ce plan est un plan de symétrie de la surface.

Les deux génératrices suivant lesquelles ce plan principal coupe le cône sont évidemment, d'après sa définition même, les deux tangentes, au point commun, du cercle et de l'ellipse, qui forment la section principale de la surface par le plan des zx, et qui sont représentés par la seconde équation (141); et il est clair que l'on obtiendra l'axe du cône, en prenant simplement dans ce plan la bissectrice de l'angle formé par ces deux droites.

Il est facile d'ailleurs de le vérifier, en considérant leurs équations, qui s'obtiendront évidemment en faisant $y=0$ dans l'équation du cône (179), ou, ce qui est la même chose, $b=0$ dans l'équation de condition des tangentes (177) ou (178), dont la première se réduit alors à

$$(\mathrm{X}a+\mathrm{Z}c)\,(\alpha^2\mathrm{X}a+\gamma^2\mathrm{Z}c)=0,$$

et par conséquent ces deux droites seront définies par les deux équations

$$(180)\ldots\quad \mathrm{X}a+\mathrm{Z}c=0,\qquad \alpha^2\mathrm{X}a+\gamma^2\mathrm{Z}c=0.$$

La première, évidemment, correspond à la tangente du cercle de rayon β, puisqu'elle définit une droite perpendiculaire à la droite dont les cosinus directeurs sont $\frac{\mathrm{X}}{\beta}$, 0, $\frac{\mathrm{Z}}{\beta}$, c'est-à-dire le diamètre de la surface aboutissant au point (X, Z), et que nous désignerons par le nom d'*axe optique*, qu'il porte dans la théorie physique. Quant à la seconde génératrice ou la tangente à l'ellipse, la seconde équation (180) permet également de la définir géométriquement d'une autre façon, en disant qu'elle est perpendiculaire à la droite dont les cosinus directeurs sont $\alpha^2 X$, 0, $\gamma^2 Z$. Or, si l'on considère l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1,$$

dont les sections principales appartiennent en même temps à la surface, et que l'on se reporte aux formules (136), on verra que cette dernière droite est précisément le diamètre qui aboutit à l'ombilic de cet ellipsoïde situé dans le même trièdre des coordonnées que le point (X, Z), ou, ce qui est la même chose, d'après les explications que nous avons données, l'un des deux diamètres conjugués des sections circulaires de cet ellipsoïde.

Le plan tangent qui appartient à tous les autres points de la surface se trouvant ainsi remplacé pour les points doubles par le *cône tangent* (179), il nous faut maintenant définir une direction fixe par laquelle nous ferons passer toutes les sections relatives au point double considéré, et qui jouera par conséquent pour ce point, dans les questions relatives à la courbure, le rôle de la normale pour les autres points. Pour faire ce choix, nous chercherons à nous rapprocher autant que possible des conditions de symétrie que présente la normale dans le cas général par rapport à chaque direction de tangente, et dans cet esprit on voit que nous devrons évidemment prendre de préférence à toute autre direction l'axe du cône, qui jouit seul de cette propriété, analogue à celle de la normale dans le cas général, que toutes les directions possibles de tangentes sont deux à deux symétriques par rapport à cette droite.

Cela posé, toutes les sections planes passant ainsi par l'axe du cône tangent (179), chacune se trouvera naturellement définie par les génératrices du cône situées dans cette section, qui sont en même temps les tangentes aux deux courbes d'intersection de la surface par le plan considéré. Pour étudier la loi de variation du rayon de courbure de ces sections, il suffira donc d'imaginer deux génératrices mobiles sur le cône, appartenant au même plan diamétral qu'elles entraînent avec elles dans leur révolution autour de l'axe, et de connaître, pour chaque position de ces génératrices, les rayons de courbure des sections dont elles sont les tangentes. Si dans cette révolution des génératrices mobiles, et par conséquent du plan de la section, les rayons de courbure des sections correspondantes demeurent invariables, il est clair que le point double, sommet du cône, répondra bien, malgré l'absence du plan tangent et de la normale, à l'idée que nous nous sommes faite d'un ombilic, et nous devrions, à notre avis du moins, lui conserver ce nom. Si, au contraire, ces rayons de courbure varient avec la position des génératrices, ou, ce qui est la même chose, avec les tangentes des courbes auxquelles ils appartiennent, nous ne pouvons plus évidemment considérer ce point comme un ombilic, et nous devrons, sans aucun doute possible, lui refuser cette qualification.

En se plaçant à ce point de vue, on reconnaît facilement que ce dernier cas est bien celui qui correspond au point double considéré. En effet, prenons comme position initiale du plan mobile le plan des zx, et comme point de départ de l'une des génératrices mobiles la première droite (180), c'est-à-dire la tangente au cercle, section principale des zx, dont le rayon est β d'après la seconde équation (141): on voit que lorsque le plan aura tourné d'un angle égal à π, la génératrice considérée coïncidant alors avec la tangente à l'ellipse, autre section principale du même plan zx, le rayon de courbure correspondant aura pour valeur dans cette nouvelle position le rayon de courbure de l'ellipse

$$\alpha^2 x^2 + \gamma^2 z^2 = \alpha^2 \gamma^2$$

au point (X,Z), c'est-à-dire, en appliquant les formules connues (*),

(*) En effet, si l'on introduit une variable auxiliaire ω qui permette de définir la courbe qu'il aura pour expression $\frac{1}{\alpha\gamma}(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^{\frac{5}{2}}$; et comme il aura d'ailleurs *varié d'une manière continue* depuis la valeur β jusqu'à cette dernière valeur, il s'ensuit nécessairement que sa valeur n'est pas restée constante pendant la révolution du plan de la section. Pendant le même temps d'ailleurs, la seconde génératrice mobile, qui coïncidait dans sa position initiale avec la seconde droite (180), ou la tangente à l'ellipse, se confondra dans sa position finale avec la première droite (180), ou la tangente au cercle, et par conséquent le rayon de courbure correspondant aura passé de même, en variant d'une façon continue, de la valeur $\frac{1}{\alpha\gamma}(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^{\frac{5}{2}}$ à la valeur β. Les deux rayons de courbure variant ainsi nécessairement avec la position de la section, il est clair que le point double en question ne peut être considéré comme un ombilic, ce qu'il s'agissait précisément de décider.

On arrive à la même conclusion par une voie plus longue et plus compliquée, mais non dénuée d'intérêt cependant, en cherchant à établir, à l'aide des méthodes développées dans le paragraphe premier, l'expression du rayon de courbure d'une section quelconque dont le plan passe par l'axe du cône tangent (179) et est défini par la génératrice du cône qui forme la tangente de cette courbe au point double considéré. Mais pour ne pas allonger

---

par les deux équations $x=\gamma\sin\omega$, $z=\alpha\cos\omega$, la formule symétrique $\pm R=\frac{(dx^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2z-dzd^2x}$ donnera immédiatement, pour un point quelconque,

$$\mp R=\frac{(\gamma^2\cos^2\omega+\alpha^2\sin^2\omega)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\gamma(\cos^2\omega+\sin^2\omega)}=\frac{1}{\alpha\gamma}\left[\frac{\alpha^2}{\gamma^2}x^2+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}z^2\right]^{\frac{3}{2}},$$

et pour le point (X, Z) en particulier, la valeur de R sera, en substituant à la place de x et z les expressions (145),

$$\mp R=\frac{1}{\alpha\gamma}\left[\frac{\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)+\gamma^2(\beta^2-\gamma^2)}{\alpha^2-\gamma^2}\right]^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\alpha\gamma}\left[\frac{\alpha^4-\gamma^4-\beta^2(\alpha^2-\gamma^2)}{\alpha^2-\gamma^2}\right]^{\frac{3}{2}},$$

ou simplement, en supprimant haut et bas le facteur $(\alpha^2-\gamma^2)$,

$$\mp R=\frac{1}{\alpha\gamma}(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^{\frac{3}{2}}.$$

outre mesure les développements de ce travail déjà trop étendus, nous examinerons ce point spécial dans un court Appendice que l'on trouvera à la suite de ce Mémoire.

En résumé, nous avons donc ainsi reconnu l'existence, dans les trois sections principales de la *Surface de l'onde,* de *huit ombilics* situés quatre par quatre, dans les plans principaux des yz et des xy, la section principale des zx, correspondant au paramètre moyen, étant la seule qui n'en renferme pas, conclusions parfaitement conformes à celles obtenues à l'aide d'élégantes méthodes géométriques par le Colonel Mannheim dans l'ouvrage cité plus haut.

Quant aux quatre points doubles (145), auxquels Lamé n'a pas craint d'attribuer la dénomination d'ombilics, pressentant sans doute ce fait important (bien qu'il ne l'énonce pas ni ne le démontre), que les coordonnées de ces points vérifiaient les équations caractéristiques des ombilics, nous proposerons, pour rappeler ce fait, de leur attribuer la dénomination de *faux ombilics*, qui résumera ainsi en un mot les résultats que nous avons constatés à leur sujet.

L'explication de l'antinomie que semblent présenter ces résultats est d'ailleurs facile à apercevoir ; elle tient uniquement à ce que, pour procéder à la recherche des ombilics de la surface de l'onde, au lieu de prendre les équations qui les déterminent avec la forme (128) ou (93), qui est la forme primordiale et essentielle, nous les avons prises sous la forme (127^{bis}), c'est-à-dire que nous avons chassé les dénominateurs, et mis ainsi partout en facteur l'une des trois dérivées premières $\frac{\varphi}{x}$, $\frac{\varphi}{y}$, $\frac{\varphi}{z}$. Or, ces dérivées étant toutes nulles dans le cas actuel, il arrive que les équations que nous avons ainsi obtenues sont vérifiées, quelles que soient les dérivées secondes, ce qui laisse par conséquent complètement en dehors les circonstances relatives à la courbure des différentes sections menées par le point double considéré.

Pour faire une étude tout à fait complète de la *Surface de l'onde,* il faudrait à présent montrer que ces huit ombilics, dont nous venons de constater l'existence dans les sections principales de la surface, sont bien les seuls qu'elle possède. Mais, sans nous lancer dans les nouveaux calculs qu'exigerait cette recherche, nous pensons qu'il n'est pas nécessaire d'avoir épuisé ainsi les questions qui se rapportent à cet exemple si fécond et si intéressant, pour avoir réalisé le but que nous nous proposions, et qui était simplement de montrer, par une nouvelle et dernière application, l'utilité et la commodité de la méthode que nous avons préconisée dans ce travail.

Cet exemple d'ailleurs, outre l'intérêt qui résulte de son importance dans la physique mathématique, met bien en relief l'avantage propre de notre méthode, car l'équation de la surface ne pouvant être résolue dans ce cas par rapport à l'une quelconque des variables qu'à l'aide de radicaux superposés, qui se perpétueront et se multiplieront en nombre par la différentiation, on voit que, sous peine d'entamer le calcul avec des équations d'une complication inextricable, on ne pourra faire autre chose, si l'on veut appliquer les formules classiques, que de commencer par calculer les dérivées p, q, r, s, t, à l'aide du théorème des fonctions implicites, pour les substituer dans les équations connues; c'est-à-dire que l'on commencera forcément par refaire pour ce cas particulier précisément les équations (93) que nous avons établies pour toutes les surfaces, et l'on aura ainsi ajouté au calcul spécial déduit de cette dernière forme d'équations, que nous venons d'accomplir, et qui est, comme on l'a vu, déjà suffisamment long par lui-même, toute la peine et les développements qu'exigent le calcul et la substitution des dérivées $p, q, \ldots$ dans les équations classiques, pour arriver à notre forme d'équations (93), que notre théorie donne très simplement une fois pour toutes et d'une façon générale.

Quant au résultat que nous avons obtenu comme application de notre méthode dans ce dernier exemple, il était assurément connu depuis longtemps, notamment depuis un travail célèbre de Plücker, qui renferme une étude complète très remarquable des propriétés géométriques de cette *Surface des ondes*. Mais les beaux résultats qu'il a signalés et le premier mis en lumière, ont été obtenus, croyons-nous, au moyen de considérations spéciales à cette surface (*), et basées sur les notions mêmes qui lui donnent naissance dans la théorie de la propagation des ondes. Les calculs que nous venons de présenter, conservent donc, même encore après cette célèbre étude, leur intérêt et leur originalité, en ce qu'ils sont simplement l'application à ce cas spécial d'une méthode générale propre à toutes les surfaces.

Nous arrêterons là les développements déjà un peu longs de cette thèse, auxquels nous nous sommes laissé entrainer, croyant avoir fait suffisamment ressortir les avantages d'une méthode qui fournit seule des formules immédiatement applicables dans tous les cas, et qui permettent à chaque instant dans les recherches de tout genre, une interprétation géométrique des calculs. Avantage précieux, surtout dans les questions de mécanique et de physique mathématique, où la considération des surfaces s'impose pour ainsi dire à chaque pas, et joue un rôle capital dans toutes les théories véritablement importantes.

(*) N'ayant malheureusement pas ce travail à notre disposition, nous formulons cette conjecture d'après la théorie fort complète que Lamé présente de cette surface, (d'après Plücker, croyons-nous,) dans ses 18e et 19e *Leçons sur la Théorie mathématique de l'Élasticité*, laquelle repose tout entière sur la considération des *points conjugués*, notion fort ingénieuse, mais absolument spéciale à cette surface, et basée sur la considération de l'équation *aux vitesses des ondes planes*, dont la surface de l'onde est, comme on sait, l'enveloppe.

APPENDICE

NOTE

SUR L'EXPRESSION DU RAYON DE COURBURE DES SECTIONS PLANES AUX POINTS DOUBLES DE LA SURFACE DES ONDES.

Nous avons montré, en terminant le mémoire qui précède, que, pour les quatre points doubles de la *Surface des ondes*, le plan tangent était remplacé par un *cône tangent* du second ordre, et nous avons fait observer que la normale disparaissant alors, les formules habituellement employées pour l'étude des courbures des sections planes, qui toutes reposent sur la considération de la normale, ne pouvaient plus être dans ce cas d'aucune utilité. Pour jouer le rôle essentiel de la normale dans ces questions, nous avons proposé de prendre à sa place l'axe du cône tangent, qui de toutes les directions s'en rapproche le plus par ses propriétés de symétrie à l'égard des différentes tangentes, ainsi que nous l'avons expliqué, et cette simple notion nous a suffi pour reconnaître que les points doubles en question ne satisfaisaient pas aux conditions caractéristiques des ombilics, c'est-à-dire à l'égalité des courbures de toutes les sections planes menées ainsi par cet axe. Mais nous voulons dans cette note pousser plus loin la question, et pour compléter l'analogie au sujet de toutes les considérations envisagées pour les autres points, rechercher pour ces points, à l'aide des théories développées dans le paragraphe Ier, l'expression du rayon de courbure des sections planes ainsi obtenues, chacune étant définie par la tangente ou génératrice du cône à laquelle elle correspond; et nous obtiendrons ainsi une formule qui jouera par conséquent pour ces points le rôle des formules (5) ou (6) pour les autres points, lesquelles renferment implicitement, comme nous l'avons vu, toutes les lois relatives aux courbures des différentes sections planes menées par un même point.

A cet effet, l'axe du cône tangent devant jouer un rôle essentiel dans cette théorie, bien que nous l'ayons déjà suffisamment défini au point de vue géométrique en disant qu'il est la bissectrice des deux droites (180), nous croyons néanmoins utile tout d'abord de définir aussi analytiquement sa position, en donnant l'expression de ses trois cosinus directeurs.

Pour cela, ayant résolu séparément les deux équations (180), ce qui donne, en ayant égard aux égalités (176) et aux valeurs (165), et se rappelant que pour ces droites $b = 0$,

$$\frac{a}{Z} = \frac{c}{-X} = \frac{\pm\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{X^2+Z^2}} = \frac{\pm 1}{\beta},$$

$$\frac{a}{\gamma^2 Z} = \frac{c}{-\alpha^2 X} = \frac{\pm\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{\alpha^4 X^2+\gamma^4 Z^2}} = \frac{\pm 1}{\alpha\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}},$$

on verra facilement, en faisant la figure, que, si l'on considère sur chacune de ces droites le sens dirigé *vers l'extérieur de la surface,* il faudra prendre dans le dernier rapport le signe + pour la première droite, et le signe — pour la seconde ; en sorte que, si nous convenons d'appeler $(a', 0, c')$ et $(a'', 0, c'')$ les deux directions ainsi complètement définies, nous aurons en vertu des équations qui précèdent :

$$(181). \quad \left\{\begin{aligned} a' &= \frac{Z}{\beta}, & c' &= \frac{-X}{\beta}. \\ a'' &= \frac{-\gamma^2 Z}{\alpha\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}}, & c'' &= \frac{\alpha^2 X}{\alpha\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}}. \end{aligned}\right.$$

Si maintenant nous convenons d'appeler ω_0 l'angle que forme chacune de ces droites avec l'axe du cône également dirigé vers l'extérieur de la surface, et par conséquent $2\omega_0$ l'angle formé au sommet du cône par ces deux droites, nous aurons, par suite des valeurs que nous venons d'écrire et des égalités (176),

$$\cos 2\omega_0 = a'a'' + c'c'' = \frac{-\gamma^2 Z^2 - \alpha^2 X^2}{\beta . \alpha\gamma \sqrt{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}} = \frac{-\alpha\gamma}{\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}},$$

d'où nous conclurons immédiatement

$$\left\{\begin{aligned} \sin\omega_0 &= \sqrt{\frac{1-\cos 2\omega_0}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}}\right)}, \\ \cos\omega_0 &= \sqrt{\frac{1+\cos 2\omega^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}}\right)}. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, ayant déjà appelé θ l'angle de l'axe optique avec l'axe des x, il est clair que $\theta - \frac{\pi}{2}$ sera l'angle formé par la tangente au cercle dirigée vers l'extérieur de la surface, avec le même axe des x, et par conséquent l'axe du cône fera avec les axes des x et des z des angles respectivement égaux à $\theta - \frac{\pi}{2} + \omega_0$, et $\frac{\pi}{2} - \left(\theta - \frac{\pi}{2} + \omega_0\right) = \pi - (\theta + \omega_0)$; et, par conséquent, si nous désignons par p, o, q les cosinus directeurs de cet axe du cône tangent, nous obtiendrons pour ces quantités, eu égard aux valeurs précédentes, ainsi qu'aux valeurs (167), où $\cos\theta' = \sin\theta$, les expressions suivantes

$$(182).\left\{\begin{aligned} p &= \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2} + \omega_0\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\theta + \omega_0)\right] \\ &= \sin(\theta + \omega_0) = \cos\theta \sin\omega_0 + \sin\theta\cos\omega_0 \\ &= \frac{X}{\beta}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}}\right)} + \frac{Z}{\beta}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}}\right)}, \\ q &= \cos\left[\pi - (\theta + \omega_0)\right] = -\cos(\theta + \omega_0) \\ &= -\cos\theta\cos\omega_0 + \sin\theta\sin\omega_0 \\ &= -\frac{X}{\beta}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}}\right)} + \frac{Z}{\beta}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}}\right)}, \end{aligned}\right.$$

lesquelles donnent bien, comme cela devait être, $p^2 + q^2 = 1$, ainsi qu'il est facile de le vérifier à l'aide des valeurs (165) et des égalités (176).

La direction par laquelle nous devons faire passer toutes les sections planes étant ainsi définie analytiquement, on peut espérer d'abord obtenir l'expression du rayon de courbure cherché à l'aide de la formule (1), dans laquelle les cosinus a, b, c de la tangente seraient censés vérifier l'équation de condition (178), c'est-à-dire par la formule

$$R = \frac{-\left[\frac{\Phi}{x}\cos\lambda + \frac{\Phi}{y}\cos\mu + \frac{\Phi}{z}\cos\nu\right]}{F(a, b, c)},$$

les trois cosinus du numérateur étant toujours ceux du rayon de courbure lui-même, et le dénominateur $F(a, b, c)$ étant dans le cas actuel, en vertu de la formule (2), l'expression

$$(185).\quad F(a,b,c) = a^2\frac{\Phi^2}{x^2} + b^2\frac{\Phi^2}{y^2} + c^2\frac{\Phi^2}{z^2} + 2bc\frac{\Phi^2}{yz} + 2ca\frac{\Phi^2}{zx} + 2ab\frac{\Phi^2}{xy}.$$

Or, le numérateur étant constamment nul pour les points en question en vertu des équations (173), on voit qu'il faut de toute nécessité que le dénominateur le soit également, sans quoi le rayon de courbure ne pourrait pas prendre en chaque point une valeur finie et déterminée, ainsi que nous l'avons reconnu dans la discussion par laquelle nous avons terminé le mémoire qui précède. L'expression ci-dessus du rayon de courbure se présentera donc constamment sous la forme $\frac{0}{0}$, et par conséquent il nous faudra, pour le déterminer, chercher quelque autre méthode.

Mais auparavant il n'est pas inutile de voir par une vérification directe comment il se fait que le dénominateur de l'expression précédente soit constamment nul, bien qu'il ne renferme pas en facteurs, comme le numérateur, les dérivées $\frac{\Phi}{x}, \frac{\Phi}{y}, \frac{\Phi}{z}$.

Pour cela ayant déduit des expressions (170), (171) et (169)

$$\frac{\Phi^2}{x^2} = A + x\frac{dA}{dx} = A + x\left(\frac{dP}{dx} + 2\alpha^2 x\right) = A + 4\alpha^2 x^2,$$

$$\frac{\Phi^2}{yz} = y\frac{dB}{dz} = y\left(\frac{dP}{dz} + 2\beta^2 z\right) = 2(\beta^2 + \gamma^2)yz,$$

nous en conclurons immédiatement, à l'aide de simples permutations circulaires,

$$(184).\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\Phi^2}{x^2} = A + 4\alpha^2 x^2, & \dfrac{\Phi^2}{y^2} = B + 4\beta^2 y^2, & \dfrac{\Phi^2}{z^2} = C + 4\gamma^2 z^2, \\ \dfrac{\Phi^2}{yz} = 2(\beta^2+\gamma^2)yz, & \dfrac{\Phi^2}{zx} = 2(\gamma^2+\alpha^2)zx, & \dfrac{\Phi^2}{xy} = 2(\alpha^2+\beta^2)xy; \end{array}\right.$$

et nous aurons par conséquent pour le point double (X, 0, Z), en raison des valeurs (172),

$$(185).\quad \left\{\begin{array}{lll} \left(\dfrac{\Phi^2}{x^2}\right)_{00} = 4\alpha^2 X^2, & \left(\dfrac{\Phi^2}{y^2}\right)_{00} = B_{00}, & \left(\dfrac{\Phi^2}{z^2}\right)_{00} = 4\gamma^2 Z^2, \\ \left(\dfrac{\Phi^2}{yz}\right)_{00} = 0, & \left(\dfrac{\Phi^2}{zx}\right)_{00} = 2(\gamma^2+\alpha^2)ZX, & \left(\dfrac{\Phi^2}{xy}\right)_{00} = 0, \end{array}\right.$$

ce qui donnera, en vertu de l'expression (183), pour la valeur de F (a, b, c) relative au point en question

$$F(a, b, c)_{00} = 4\left[\alpha^2 X^2 a^2 + \gamma^2 Z^2 c^2 + (\alpha^2 + \gamma^2)XZ\right] + B_{00}b^2,$$

c'est-à-dire précisément zéro, en vertu de l'équation de condition (178), à laquelle satisfait par hypothèse la direction (a, b, c). Et l'on peut remarquer, à ce sujet, que le cône tangent (179) n'est autre chose que le cône asymptote de la surface indicatrice correspondant au point considéré, obtenue d'après la règle du § III, laquelle à la vérité perd dans le cas actuel ses propriétés représentatives des rayons de courbure, en raison de la disparition du plan tangent, mais qui pourra être facilement remplacée pour cet objet de la façon que nous indiquerons tout à l'heure.

La formule (1) ne pouvant donc nous donner l'expression cherchée du rayon de courbure, pas plus que les formules (5) et (6), nous remonterons à la formule (0), qui a été le point de départ de toute notre théorie, et nous appliquerons une fois de plus à cette équation les procédés qui nous ont servi à en déduire la formule (1). Différentiant donc de nouveau cette équation, il est facile de voir que nous obtiendrons

$$\begin{aligned}
&\frac{\varphi}{x} d^3x + 3\left(\frac{\varphi^2}{x^2} dx + \frac{\varphi^2}{xy} dy + \frac{\varphi^2}{xz} dz\right) d^2x \\
&+ \frac{\varphi}{y} d^3y + 3\left(\frac{\varphi^2}{yx} dx + \frac{\varphi^2}{y^2} dy + \frac{\varphi^2}{yz} dz\right) d^2y \\
&+ \frac{\varphi}{z} d^3z + 3\left(\frac{\varphi^2}{zx} dx + \frac{\varphi^2}{zy} dy + \frac{\varphi^2}{z^2} dz\right) d^2z \\
&\qquad + \left(\left(\frac{\varphi}{x} dx + \frac{\varphi}{y} dy + \frac{\varphi}{z} dz\right)\right)^3 = 0,
\end{aligned}$$

en employant, pour abréger l'écriture, une notation symbolique, qui consiste à écrire entre deux doubles parenthèses les termes qui, après avoir été calculés et développés d'après les règles habituelles, comme si chaque symbole représentait une quantité, devront être pris ensuite avec l'acception différentielle dont nous sommes convenus en commençant notre travail. Si nous divisons de même maintenant tous les termes de cette équation par ds^3, afin d'avoir une équation en termes finis, et que nous remplacions encore dans le résultat respectivement $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, par a, b, c, et $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}$, par $\frac{1}{R}\cos\lambda$, $\frac{1}{R}\cos\mu$, $\frac{1}{R}\cos\nu$, nous obtiendrons semblablement

$$\begin{aligned}
&\frac{\varphi}{x}\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{\varphi}{y}\frac{d^3y}{ds^3} + \frac{\varphi}{z}\frac{d^3z}{ds^3} \\
&+ \frac{3}{R}\left[\left(\frac{\varphi^2}{x^2} a + \frac{\varphi^2}{xy} b + \frac{\varphi^2}{xz} c\right)\cos\lambda\right. \\
&+ \left(\frac{\varphi^2}{yx} a + \frac{\varphi^2}{y^2} b + \frac{\varphi^2}{yz} c\right)\cos\mu \\
&+ \left.\left(\frac{\varphi^2}{zx} a + \frac{\varphi^2}{zy} b + \frac{\varphi^2}{z^2} c\right)\cos\nu\right] \\
&+ \left(\left(\frac{\varphi}{x} a + \frac{\varphi}{y} b + \frac{\varphi}{z} c\right)\right)^3 = 0.
\end{aligned}$$

Et, si nous appliquons maintenant ce résultat à l'équation $\Phi\,(x, y, z), = 0$, et au point double $(X, 0, Z)$, pour lequel les dérivées $\frac{\Phi}{x}, \frac{\Phi}{y}, \frac{\Phi}{z}$ sont nulles, d'après les équations (173), on voit que nous tirerons simplement de l'équation précédente

$$(186)\quad \left\{\begin{aligned} R = &\frac{-3}{\left(\left(a\frac{\Phi}{x}+b\frac{\Phi}{y}+c\frac{\Phi}{z}\right)\right)^3_{00}}\left[\left(\frac{\Phi^2}{x^2}a+\frac{\Phi^2}{xy}b+\frac{\Phi^2}{xz}c\right)\cos\lambda\right. \\ &\left.+\left(\frac{\Phi^2}{yx}a+\frac{\Phi^2}{y^2}b+\frac{\Phi^2}{yz}c\right)\cos\mu+\left(\frac{\Phi^2}{zx}a+\frac{\Phi^2}{zy}b+\frac{\Phi^2}{z^2}c\right)\cos\nu\right]_{00}=\frac{N}{D},\end{aligned}\right.$$

en désignant, pour faciliter les transformations, par N et D les deux termes du rapport qui exprime la valeur de R que nous venons d'écrire, et qu'il s'agit maintenant de calculer.

A cet effet, pour obtenir d'abord le dénominateur D, il suffira de remplacer dans l'expression

$$(187)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\left(a\frac{\Phi}{x}+b\frac{\Phi}{y}+c\frac{\Phi}{z}\right)\right)^3=a^3\frac{\Phi^3}{x^3}+b^3\frac{\Phi^3}{y^3}+c^3\frac{\Phi^3}{z^3}+abc\frac{\Phi^3}{xyz} \\ &+3b^2c\frac{\Phi^3}{y^2z}+3bc^2\frac{\Phi^3}{yz^2}+3c^2a\frac{\Phi^3}{z^2x}+3ca^2\frac{\Phi^3}{zx^2}+3a^2b\frac{\Phi^3}{x^2y}+3ab^2\frac{\Phi^3}{xy},\end{aligned}\right.$$

les dérivées troisièmes de Φ par leurs valeurs relatives au point $(X, Z,)$ lesquelles s'obtiendront sans difficulté en partant des expressions (184) des dérivées secondes, qui donnent, en ayant égard aux valeurs (171) et (169),

$$\frac{\Phi^3}{x^3}=\frac{dA}{dx}+8\alpha^2x=\frac{dP}{dx}+2\alpha^2x+8\alpha^2x=12\alpha^2x,$$

et de même pour les autres; de sorte que nous formerons sans peine le tableau suivant

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\Phi^3}{x^3}=12\alpha^2x, &&\frac{\Phi^3}{y^2z}=2(\beta^2+\gamma^2)z, &&\frac{\Phi^3}{yz^2}=2(\beta^2+\gamma^2)y, \\ &\frac{\Phi^3}{y^3}=12\beta^2y, &&\frac{\Phi^3}{z^2x}=2(\gamma^2+\alpha^2)x, &&\frac{\Phi^3}{zx^2}=2(\gamma^2+\alpha^2)z, \\ &\frac{\Phi^3}{z^3}=12\gamma^2z, &&\frac{\Phi^3}{x^2y}=2(\alpha^2+\beta^2)y, &&\frac{\Phi^3}{xy^2}=2(\alpha^2+\beta^2)x, \\ & &&\qquad\frac{\Phi^3}{xy}=0; && \end{aligned}\right.$$

d'où nous conclurons, en prenant ces valeurs pour le point (X, 0, Z,) et les substituant dans l'égalité (187),

$$(188).\left\{\begin{aligned} D &= \left(\left(a\frac{\Phi}{x} + b\frac{\Phi}{y} + c\frac{\Phi}{z}\right)\right)^3_{00} = a^3.\,12\alpha^2 X + c^3.\,12\gamma^2 Z \\ &+ 3b^2c\,.\,2(\beta^2+\gamma^2)\,Z + 3c^2a\,.\,2(\gamma^2+\alpha^2)\,X \\ &+ 3ac^2.\,2(\gamma^2+\alpha^2)\,Z + 3ab^2\,.\,2(\alpha^2+\beta^2)\,X \\ &= 6aX\left[2\alpha^2a^2 + (\gamma^2+\alpha^2)\,c^2 + (\alpha^2+\beta^2)\,b^2\right] \\ &+ 6cZ\left[2\gamma^2c^2 + (\beta^2+\gamma^2)\,b^2 + (\gamma^2+\alpha^2)\,a^2\right] \\ &= 6aX\left[\alpha^2(a^2+b^2+c^2) + \alpha^2a^2 + \beta^2b^2 + \gamma^2c^2\right] \\ &+ 6cZ\left[\gamma^2(a^2+b^2+c^2) + \alpha^2a^2 + \beta^2b^2 + \gamma^2c^2\right] \\ &= 6\left[(\alpha^2Xa+\gamma^2Zc)(a^2+b^2+c^2) + (Xa+Zc)(\alpha^2a^2+\beta^2b^2+\gamma^2c^2)\right]. \end{aligned}\right.$$

Nous obtiendrons de même la valeur de N, en substituant dans le numérateur de l'expression (186) de R, à la place des dérivées secondes de Φ, leurs valeurs pour le point (X, Z,) que nous avons déjà calculées (185), ce qui nous donnera semblablement

$$(189).\left\{\begin{aligned} N = -3\Big[\{&4\alpha^2X^2.\,a + 2(\gamma^2+\alpha^2)\,ZX\,.\,c\}\cos\lambda \\ &+ B_{00}\,.\,b\cos\mu + \{2(\gamma^2+\alpha^2)\,ZX\,.\,a + 4\gamma^2Z^2\,c\}\cos\nu\Big], \end{aligned}\right.$$

expression dans laquelle il ne reste plus qu'à remplacer les trois cosinus du rayon de courbure par leurs valeurs en fonction de a, b, c.

Pour obtenir immédiatement ces dernières valeurs, il suffira de connaître les cosinus de la normale au plan de la section considérée, c'est-à-dire du plan qui contient l'axe du cône et la tangente $(a,\ b,\ c)$. En désignant donc pour un instant par l, m, n ces trois cosinus, ils vérifieront les deux relations

$$al + bm + cn = 0, \qquad pl + qn = 0,$$

d'où, par conséquent,

$$\frac{l}{qb} = \frac{m}{pc - qa} = \frac{n}{-pb};$$

et d'autre part le rayon de courbure cherché, étant perpendiculaire à la fois à la tangente (a, b, c) et à la normale à son plan (l, m, n), donnera lieu de même aux deux relations

$$\left\{\begin{array}{l} a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu = 0, \\ qb\cos\lambda + (pc - qa)\cos\mu - pb\cos\nu = 0, \end{array}\right.$$

d'où nous tirerons semblablement

$$\frac{\cos\lambda}{-pb^2 - c(pc - qa)} = \frac{\cos\mu}{qbc + pba} = \frac{\cos\nu}{a(pc - qa) - qb^2},$$

équations que l'on peut encore écrire

$$\frac{\cos\lambda}{a(pa+qc)-p(a^2+b^2+c^2)} = \frac{\cos\mu}{b(pa+qc)} = \frac{\cos\nu}{c(pa+qc)-q(a^2+b^2+c^2)}.$$

Sous cette dernière forme, on voit qu'on simplifiera notablement les écritures en introduisant, seulement pour faire le calcul, l'angle ω formé au sommet du cône par la tangente (a, b, c) avec l'axe du cône, et dont le cosinus a pour expression

(190) . . . . $\cos\omega = pa + qc.$

Au moyen de cette dernière relation ainsi que de l'égalité $p^2 + q^2 = 1$, les équations précédentes deviendront

$$\frac{\cos\lambda}{a\cos\omega - p} = \frac{\cos\mu}{b\cos\omega} = \frac{\cos\nu}{c\cos\omega - q}$$

$$= \frac{\pm\sqrt{\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu}}{\sqrt{(a\cos\omega - p)^2 + b^2\cos^2\omega + (c\cos\omega - q)^2}}$$

$$= \frac{\pm 1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)\cos^2\omega - 2(pa + qc)\cos\omega + p^2 + q^2}}$$

$$= \frac{\pm 1}{\sqrt{\cos^2\omega - 2\cos^2\omega + 1}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - \cos^2\omega}} = \frac{\pm 1}{\sin\omega},$$

d'où nous tirerons par conséquent les trois valeurs

$$\cos\lambda = \pm \frac{a\cos\omega - p}{\sin\omega},\ \cos\mu = \pm \frac{b\cos\omega}{\sin\omega},\ \cos\nu = \pm \frac{c\cos\omega - q}{\sin\omega},$$

lesquelles, étant substituées dans l'expression obtenue précédemment pour N (189), donneront pour cette quantité

$$\begin{aligned} N = \frac{\mp 3}{\sin\omega}\Big[& \{4\alpha^2X^2a + 2(\gamma^2 + \alpha^2)ZXc\}(a\cos\omega - p) + B_{00}b^2\cos\omega \\ & + \{2(\gamma^2 + \alpha^2)ZX\,a + 4\gamma^2Z^2c\}(c\cos\omega - q)\Big] \\ = \frac{\mp 3}{\sin\omega}\Big[& \{4\alpha^2X^2a^2 + 4\gamma^2Z^2c^2 + 4(\gamma^2 + \alpha^2)XZac + B_{00}b^2\}\cos\omega \\ & - \{4\alpha^2X^2ap + 4\gamma^2Z^2cq + 2(\gamma^2 + \alpha^2)ZX(cp + aq)\}\Big], \end{aligned}$$

c'est-à-dire simplement, en tenant compte de l'équation de condition (178) et mettant en évidence les facteurs déjà rencontrés au dénominateur D,

$$(191).\left\{\begin{aligned} N &= \frac{\pm 3.2}{\sin\omega}\left[2\alpha^2Xap + 2\gamma^2Zcq + (\gamma^2 + \alpha^2)ZX(cp + aq)\right] \\ &= \frac{\pm 6}{\sin\omega}\left[(Xp+Zq)(\alpha^2Xa+\gamma^2Zc) + (\alpha^2Xp+\gamma^2Zq)(Xa+Zc)\right]. \end{aligned}\right.$$

Si maintenant nous voulons éliminer l'angle ω, introduit seulement pour faciliter le calcul, nous aurons en vertu de l'équation de définition (190)

$$\sin\omega = \sqrt{1 - \cos^2\omega} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - (pa + qc)^2}$$

$$= \sqrt{b^2 + (p^2 + q^2)(a^2 + c^2) - (pa + qc)^2} = \sqrt{b^2 + (qa - pc)^2},$$

et si nous remettons à présent cette dernière valeur dans l'expression précédente de N (191), puis que nous reportions la valeur de N qui en résulte, ainsi que la valeur (188) de D, dans l'expression (186) de R, nous aurons définitivement pour l'expression du rayon de courbure cherchée :

$$(192)\quad \mathrm{R}=\frac{\pm\left[(\mathrm{X}p+\mathrm{Z}q)(\alpha^2\mathrm{X}a+\gamma^2\mathrm{Z}c)+(\alpha^2\mathrm{X}p+\gamma^2\mathrm{Z}q)(\mathrm{X}a+\mathrm{Z}c)\right]}{\left[(\alpha^2\mathrm{X}a+\gamma^2\mathrm{Z}c)(a^2+b^2+c^2)+(\mathrm{X}a+\mathrm{Z}c)(\alpha^2a^2+\beta^2b^2+\gamma^2c^2)\right]\sqrt{b^2+(qa-pc)^2}},$$

formule tout à fait analogue aux formules (5) ou (6) du § I, et qui donne l'expression du rayon de courbure d'une section plane quelconque passant par l'axe du cône tangent, et définie par la direction de la tangente correspondante, c'est-à-dire par la droite intersection de ce plan avec le cône tangent, de même que dans la formule (5) ou (6) la section normale était définie par la tangente ou l'intersection du plan considéré avec le plan tangent.

La formule précédente, de même que la formule (6), se prête très aisément à une représentation géométrique fort simple des rayons de courbure des différentes sections planes; car, si nous convenons de porter sur chaque tangente ou génératrice du cône tangent, à partir du point considéré, une longueur précisément égale à celle du rayon de courbure correspondant à cette tangente, les coordonnées de l'extrémité, rapportées au point double comme origine, étant alors données par les valeurs

$$\frac{x'}{\mathrm{R}}=a,\qquad \frac{y'}{\mathrm{R}}=b,\qquad \frac{z'}{\mathrm{R}}=c,$$

toutes ces extrémités seront situées sur la surface dont on obtiendra l'équation en éliminant a, b, c entre ces dernières équations et l'équation précédente (192), et qui sera la suivante, R disparaissant par suite de la loi d'homogénéité,

$$1=\frac{\pm\left[(\mathrm{X}p+\mathrm{Z}q)(\alpha^2\mathrm{X}x'+\gamma^2\mathrm{Z}z')+(\alpha^2\mathrm{X}p+\gamma^2\mathrm{Z}q)(\mathrm{X}x'+\mathrm{Z}z')\right]}{\left[(\alpha^2\mathrm{X}x'+\gamma^2\mathrm{Z}z')(x'^2+y'^2+z'^2)+(\mathrm{X}x'+\mathrm{Z}z')(\alpha^2x'^2+\beta^2y'^2+\gamma^2z'^2)\right]\sqrt{y'^2+(qx'-pz')^2}};$$

ou, ce qui est la même chose, en désignant pour simplifier par H et K les deux constantes

$$(193)\ \ldots\quad \mathrm{H}=\mathrm{X}p+\mathrm{Z}q,\qquad \mathrm{K}=\alpha^2\mathrm{X}p+\gamma^2\mathrm{Z}q,$$

où p et q sont les valeurs (182), et de plus, faisant disparaître le dénominateur et le radical de l'équation précédente,

$$\begin{gathered}[(\alpha^2 Xx'+\gamma^2 Zz')(x'^2+y'^2+z'^2)+(Xx'+Zz')(\alpha^2x'^2+\beta^2y'^2+\gamma^2z'^2)]^2\,[y'^2+(qx'-pz')^2]\\ -\left[H(\alpha^2Xx'+\gamma^2Zz')+K(Xx'+Zz')\right]^2=0;\end{gathered}$$

et par conséquent cette surface du *huitième ordre* jouera par rapport au cône tangent (179) le même rôle que la surface indicatrice (38) par rapport au plan tangent pour les autres points, c'est-à-dire que le rayon vecteur de la courbe d'intersection de ces deux surfaces issu du sommet, sera pour chaque direction de tangente, précisément égal au rayon de courbure correspondant à cette tangente.

Une fois en possession de la formule (192), on pourrait, comme nous l'avons fait pour les autres points, en déduire par la méthode des maximum et des minimum, les directions correspondantes aux sections principales dans le cas général, et conclure de là la loi de distribution des courbures des sections planes autour de l'axe du cône tangent. Mais cette recherche nous entraînerait beaucoup trop loin, et nous nous contenterons en terminant cette note, de nous assurer de nouveau de l'exactitude des résultats qui précèdent, en vérifiant directement que la formule (192) donne bien pour les deux directions (180), situées dans le plan principal commun au cône et à la surface, les deux valeurs que nous connaissons *à priori*, à savoir β et $\frac{1}{\alpha\gamma}(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^{\frac{3}{2}}$.

Pour cela, ayant posé par analogie avec les notations (193)

$$h = Xa + Zc, \qquad k = \alpha^2 Xa + \gamma^2 Zc,$$

nous écrirons l'expression (192) sous la forme

$$R = \frac{\pm(Hk+Kh)}{\left[k+h(\alpha^2a^2+\beta^2b^2+\gamma^2c^2)\right]\sqrt{b^2+(qa-pc)^2}};$$

et notant toujours d'un accent les quantités relatives à la première droite, et de deux celles relatives à la seconde, nous aurons par définition et en vertu des équations (180)

$$h' = Xa' + Zc' = 0, \qquad k'' = \alpha^2 Xa'' + \gamma^2 Zc'' = 0,$$

ce qui nous donnera respectivement pour les deux rayons de courbure, en nous servant de l'expression précédente de R, et nous souvenant que b est nul pour ces deux droites,

$$\left\{\begin{aligned} R' &= \frac{\pm Hk'}{k'\sqrt{(qa'-pc')^2}} = \frac{\pm H}{qa'-pc'}, \\ R'' &= \frac{\pm Kh''}{h''(\alpha^2 a''^2 + \gamma^2 c''^2)\sqrt{(qa''-pc'')^2}} = \frac{\pm K}{(\alpha^2 a''^2 + \gamma^2 c''^2)(qa''-pc'')}. \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on se reporte aux valeurs (181) et que l'on ait égard aux égalités (176), on voit de suite que l'on a

$$qa' - pc' = \frac{qZ + pX}{\beta} = \frac{H}{\beta},$$

$$qa'' - pc'' = \frac{-qZ\gamma^2 - pX\alpha^2}{\alpha\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}} = \frac{-K}{\alpha\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}},$$

$$\alpha^2 a''^2 + \gamma^2 c''^2 = \frac{\alpha^2\gamma^4 Z^2 + \gamma^2\alpha^4 X^2}{\alpha^2\gamma^2(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)} = \frac{\alpha^2 X^2 + \gamma^2\,{}^2}{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2} = \frac{\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2},$$

et, en reportant ces dernières valeurs dans les deux valeurs immédiatement précédentes de R′ et de R″, on obtient

$$R' = \pm\beta, \qquad R'' = \pm\frac{1}{\alpha\gamma}(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^{\frac{3}{2}},$$

ce qui est bien le résultat auquel nous devions arriver.

(Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 4e année, 1880.)

NOTE

SUR

L'EXPRESSION DU RAYON DE COURBURE

DE LA

SECTION NORMALE D'UNE SURFACE

PAR

M. le Vte de SALVERT

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LILLE.

On trouve dans tous les traités de calcul différentiel et intégral l'expression du rayon de courbure de la section normale d'une surface en un point quelconque; mais cette expression contenant les dérivées partielles p, q, r, s, t n'est susceptible d'une application immédiate que lorsque l'équation de cette surface $\varphi(x, y, z) = 0$ a été préalablement résolue par rapport à z.

S'il n'en est pas ainsi, il faudra, pour chaque cas particulier, calculer à l'aide du théorème des fonctions implicites, les valeurs des dérivées p, q, r, s, t, en fonction des dérivées

$$\frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{d\varphi}{dy}, \quad \frac{d\varphi}{dz}, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \quad \frac{d^2\varphi}{dy^2}, \quad \frac{d^2\varphi}{dz^2}, \quad \frac{d^2\varphi}{dydz}, \quad \frac{d^2\varphi}{dzdx}, \quad \frac{d^2\varphi}{dxdy},$$

et les substituer ensuite dans cette expression.

Mais si l'on effectue ces calculs et cette substitution d'une façon générale, on obtiendra une formule très-symétrique et qui a l'avantage de se prêter à tous les cas.

On peut aussi établir cette formule directement de la manière suivante :

Soient λ, μ, ν, les angles que forme avec les axes une direction, située dans le plan tangent au point (x, y, z) en sorte que l'on ait :

$$\frac{d\varphi}{dx}\cos\lambda + \frac{d\varphi}{dy}\cos\mu + \frac{d\varphi}{dz}\cos\nu = 0,$$

et proposons-nous d'évaluer le rayon de courbure de la section normale qui contient cette direction.

Cette courbe est l'intersection de la surface donnée par un plan passant par le point (x, y, z), et contenant la direction (λ, μ, ν), ainsi que la normale. Conséquemment si l'on désigne par X, Y, Z, un quelconque de ses points, elle sera représentée dans l'espace par les deux équations :

$$(\mathrm{A}).\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = 0, \\ &\left(\frac{d\varphi}{dy}\cos\nu - \frac{d\varphi}{dz}\cos\mu\right)(\mathrm{X}-x) + \left(\frac{d\varphi}{dz}\cos\lambda - \frac{d\varphi}{dx}\cos\nu\right)(\mathrm{Y}-y) \\ &+ \left(\frac{d\varphi}{dx}\cos\mu - \frac{d\varphi}{dy}\cos\lambda\right)(\mathrm{Z}-z) = 0, \end{aligned}\right.$$

et nous aurons l'équation de cette même courbe dans son plan, en projetant chacun de ses points sur la tangente au point (x, y, z) comme axe des x, et sur la normale comme axe des y, ce qui nous donnera les deux équations suivantes :

$$(\mathrm{B}).\quad \left\{\begin{aligned} &x' = (\mathrm{X}-x)\cos\lambda + (\mathrm{Y}-y)\cos\mu + (\mathrm{Z}-z)\cos\nu, \\ &y' = \frac{(\mathrm{X}-x)\frac{d\varphi}{dx} + (\mathrm{Y}-y)\frac{d\varphi}{dy} + (\mathrm{Z}-z)\frac{d\varphi}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}} \; (^*), \end{aligned}\right.$$

(*) Le radical étant censé emporter avec lui le signe qui convient au sens de la normale que nous avons adopté pour sens des y' positifs, c'est-à-dire précisément le sens dans lequel doit être porté le rayon de courbure que nous nous proposons d'évaluer.

et éliminant ensuite X, Y, Z, entre les quatre équations qui précèdent.

Supposons cette opération effectuée, le rayon de courbure sera ensuite donné par la formule:

$$\mathrm{R}=\frac{(dx'^2+dy'^2)^{\frac{3}{2}}}{dx'd^2y'-dy'd^2x'},$$

et l'on obtiendrait facilement la valeur des différentielles qui figurent dans cette expression, en différentiant deux fois le système des équations (A) et (B), la variable indépendante restant arbitraire.

Mais nous n'avons besoin de connaître ces valeurs que pour le point considéré (x, y, z). Or pour ce point il résulte immédiatement du choix des axes, que l'on a,en appelant ds l'élément de courbe :

$$(dx')_0=ds, \quad (dy')_0=0,$$

et par conséquent le rayon de courbure en ce point aura pour expression :

$$\text{(C)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \mathrm{R}=\frac{(dx')_0^3}{(dx')_0(d^2y')_0}=\frac{ds^2}{(d^2y')_0}.$$

Tout ce réduit donc à calculer $(d^2y')_0$.

Pour cela, il suffit de différentier seulement la première des équations (A) et la seconde des équations (B). On obtient ainsi par une première différentiation :

$$\frac{d\varphi}{d\mathrm{X}}d\mathrm{X}+\frac{d\varphi}{d\mathrm{Y}}d\mathrm{Y}+\frac{d\varphi}{d\mathrm{Z}}d\mathrm{Z}=0,$$

$$dy'=\frac{\frac{d\varphi}{dx}d\mathrm{X}+\frac{d\varphi}{dy}d\mathrm{Y}+\frac{d\varphi}{dz}d\mathrm{Z}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}};$$

puis par une seconde différentiation :

$$(D).\left\{\begin{aligned}&\frac{d\varphi}{dX}d^2X+\left(\frac{d^2\varphi}{dX^2}dX+\frac{d^2\varphi}{dXdY}dY+\frac{d^2\varphi}{dXdZ}dZ\right)dX\\&+\frac{d\varphi}{dY}d^2Y+\left(\frac{d^2\varphi}{dYdX}dX+\frac{d^2\varphi}{dY^2}dY+\frac{d^2\varphi}{dYdZ}dZ\right)dY\\&+\frac{d\varphi}{dZ}d^2Z+\left(\frac{d^2\varphi}{dZdX}dX+\frac{d^2\varphi}{dZdY}dY+\frac{d^2\varphi}{dZ^2}dZ\right)dZ=0,\end{aligned}\right.$$

$$(E).\ \ldots\ \left\{ d^2y'=\frac{\frac{d\varphi}{dx}d^2X+\frac{d\varphi}{dy}d^2Y+\frac{d\varphi}{dz}d^2Z}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}}.\right.$$

Mais nous devons prendre ces différentes valeurs pour le point (x, y, z) pour lequel on a

$$(dX)_0=ds\cos\lambda,\quad (dY)_0=ds\cos\mu,\quad (dZ)_0=ds\cos\nu.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (D) donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned}&\frac{d\varphi}{dx}(d^2X)_0+ds^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\cos\lambda+\frac{d^2\varphi}{dxdy}\cos\mu+\frac{d^2\varphi}{dxdz}\cos\nu\right)\cos\lambda\\&+\frac{d\varphi}{dy}(d^2Y)_0+ds^2\left(\frac{d^2\varphi}{dydx}\cos\lambda+\frac{d^2\varphi}{dy^2}\cos\mu+\frac{d^2\varphi}{dydz}\cos\nu\right)\cos\mu\\&+\frac{d\varphi}{dz}(d^2Z)_0+ds^2\left(\frac{d^2\varphi}{dzdx}\cos\lambda+\frac{d^2\varphi}{dzdy}\cos\mu+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\cos\nu\right)\cos\nu=0,\end{aligned}$$

ou, en développant et ordonnant :

$$\frac{d\varphi}{dx}(d^2X)_0+\frac{d\varphi}{dy}(d^2Y)_0+\frac{d\varphi}{dz}(d^2Z)_0=$$

$$-ds^2\left[\frac{d^2\varphi}{dx^2}\cos^2\lambda+\frac{d^2\varphi}{dy^2}\cos^2\mu+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\cos^2\nu+2\frac{d^2\varphi}{dydz}\cos\mu\cos\nu+2\frac{d^2\varphi}{dzdx}\cos\nu\cos\lambda+2\frac{d^2\varphi}{dxdy}\cos\lambda\cos\mu\right].$$

Par ailleurs on aura pour le même point en vertu de l'équation (E) :

$$(d^2y')_0 = \frac{\frac{d\varphi}{dx}(d^2X)_0 + \frac{d\varphi}{dy}(d^2Y)_0 + \frac{d\varphi}{dz}(d^2Z)_0}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}},$$

ou, en substituant au numérateur sa valeur tirée de l'équation précédente :

$$(d^2y')_0 = -\frac{ds^2\left[\frac{d^2\varphi}{dx^2}\cos^2\lambda + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\cos^2\mu + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\cos^2\nu + 2\frac{d^2\varphi}{dydz}\cos\mu\cos\nu + 2\frac{d^2\varphi}{dzdx}\cos\nu\cos\lambda + 2\frac{d^2\varphi}{dxdy}\cos\lambda\cos\mu\right]}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}}$$

et par conséquent en reportant cette valeur dans l'équation (C), le rayon de courbure cherché aura définitivement pour expression :

$$R = -\frac{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}}{\frac{d^2\varphi}{dx^2}\cos^2\lambda + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\cos^2\mu + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\cos^2\nu + 2\frac{d^2\varphi}{dydz}\cos\mu\cos\nu + 2\frac{d^2\varphi}{dzdx}\cos\nu\cos\lambda + 2\frac{d^2\varphi}{dxdy}\cos\lambda\cos\mu}.$$

D'ailleurs la valeur de R étant de sa nature essentiellement positive, il faudra, dans ce résultat, prendre le radical du numérateur avec un signe contraire à celui du dénominateur; mais comme le signe du radical est supposé déterminé antérieurement par le sens de la normale que l'on a considéré, cela revient à dire que le rayon de courbure sera dirigé suivant le sens de la normale, pour lequel le radical est d'un signe contraire à celui du dénominateur de l'expression ci-dessus.